ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ

с решениями и указаниями

5–7 классы

ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Лаборатория ЗНАНИЙ

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов

ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ

с решениями и указаниями

5–7 классы

Под редакцией
М. В. Федотова

Москва
Лаборатория знаний

УДК 373.167.1:519.17
ББК 22.176я721.6
С30

Семендяева Н. Л.

С30 Олимпиадная математика. Задачи по теории графов с решениями и указаниями. 5–7 классы : учебно-методическое пособие / Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов ; под редакцией М. В. Федотова. — М. : Лаборатория знаний, 2023. — 175 с. : ил. — (ВМК МГУ — школе).

ISBN 978-5-93208-328-4

Настоящее пособие составлено на основе олимпиадных задач по математике преподавателями факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. Пособие содержит теоретический материал, подборку задач, а также указания и решения к большинству задач.

Рекомендуется школьникам 5–7 классов, интересующимся олимпиадными задачами, учителям математики, руководителям кружков и факультативов.

УДК 373.167.1:519.17
ББК 22.176я721.6

Учебное издание

Серия: «ВМК МГУ — школе»

Семендяева Наталья Леонидовна
Федотов Михаил Валентинович

ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА.
ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ С РЕШЕНИЯМИ И УКАЗАНИЯМИ.
5–7 КЛАССЫ

Учебно-методическое пособие

Ведущий редактор *М. С. Стригунова*
Художник *В. А. Прокудин*
Технический редактор *Т. Ю. Федорова*. Корректор *И. Н. Панкова*
Оригинал-макет подготовлен *О. Г. Лапко* в пакете LaTeX 2ε

Подписано в печать 22.09.22. Формат 70×100/16.
Усл. печ. л. 14,30. Заказ

Издательство «Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

ISBN 978-5-93208-328-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора 4

Предисловие 5

Используемые обозначения 6

Часть I. **Теория и задачи** 7

1. Вводные задачи 8
2. Степень вершины, подсчёт числа рёбер 14
3. Связность графов. Эйлеровы графы 20
4. Маршруты, цепи, циклы, двудольные графы 26
5. Деревья 32
6. Плоские графы 36
7. Ориентированные графы 40

Часть II. **Указания и решения** 43

1. Вводные задачи 43
2. Степень вершины, подсчёт числа рёбер 66
3. Связность графов. Эйлеровы графы 96
4. Маршруты, цепи, циклы, двудольные графы 118
5. Деревья 131
6. Плоские графы 146
7. Ориентированные графы 157

Ответы 170

Список литературы 173

ОТ РЕДАКТОРА

Уважаемый читатель, вы держите в руках одну из книг серии «ВМК МГУ — школе». Учебно-методические пособия, входящие в эту серию, являются результатом более чем пятнадцатилетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова.

Сейчас изданы пособия по алгебре, геометрии, информатике и физике для старшеклассников для подготовки к ЕГЭ, олимпиадам и вступительным экзаменам в вузы. Недавно вышли пособия по математике для подготовки к ГИА для девятиклассников.

Но мы не хотим останавливаться только на стандартных задачах, необходимых для сдачи ГИА и ЕГЭ и экзаменов в вузы. Мы хотим, чтобы школьники с младших классов и до окончания школы могли решать задачи повышенной сложности — олимпиадные задачи, на которые у учителя обычно не остаётся времени на обычном уроке математики. Большинство книг по этой тематике выходят без разбивки по классам либо без разбивки по темам. Многие хорошие книги с олимпиадными задачами вышли давно и с тех пор не переиздавались. Мы собрали много задач из различных старых и не очень старых сборников олимпиадных задач и предлагаем их вам.

Настоящее пособие рассчитано на 5–7 классы и является пятым в серии пособий по олимпиадным задачам. Будет ещё несколько книг для 5–7 классов. Параллельно мы уже ведём работу над сборником задач для 8–9 классов. Завершит серию, конечно же, пособие для 10–11 классов.

Большинство олимпиадных задач, особенно для младшей и средней школы, не намного сложнее обычных школьных задач по математике. Поэтому не бойтесь их. Они только все вместе выглядят страшными, а каждая задача по отдельности вполне вам по силам. Берите их и решайте. Дорогу осилит идущий.

Заместитель декана по учебной работе
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова,
доцент кафедры математической физики
М. В. Федотов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Каждый раздел пособия содержит теоретические основы, описание методов решения задач, примеры применения методов и набор заданий для решения. Задачи в разделах в основном расположены по принципу «*от простого — к сложному*». Аналогичная ситуация имеет место и с последовательностью разделов, поэтому сами разделы и задачи в разделах рекомендуется изучать в предложенном порядке. Приступать к решению задач надо после изучения соответствующего теоретического материала и разбора примеров.

После номера задачи в скобках приведены классы, для которых эта задача была предложена на олимпиаде. Однако это разделение на классы довольно условно. Понятно, что если задачу давали в 5 классе, то её можно давать и в 6–7 классах, и часто, наоборот, задача, которую давали на олимпиаде для 6–7 классов, вполне по силам пятиклассникам. Поэтому, придерживаясь рекомендаций в скобках, относитесь к ним творчески. Кстати, распределение задач по темам тоже не всегда однозначно. Одну и ту же задачу можно было отнести к разным темам.

В принципе, по этому пособию можно заниматься три года: в 5 классе пройти по всем разделам, выбирая задачи для 5 класса, в 6 классе снова пройти по всем разделам, выбирая задачи для 6 класса, и так далее. А можно пройти и за более короткий срок: за два года, если вы начали заниматься в 6 классе, или за один год, если вы уже в 7 классе.

Рекомендуется школьникам 5–7 классов, интересующимся олимпиадными задачами, учителям математики, руководителям кружков и факультативов.

Желаем удачи!

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\{a\}$	— множество, состоящее из одного элемента a;
$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$	— множество, состоящее из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$;
$\in$	— знак принадлежности элемента множеству;
$\cup$	— знак объединения двух множеств;
$\Longrightarrow$	— следовательно;
$\Longleftrightarrow$	— тогда и только тогда;
$\mathbb{N}$	— множество всех натуральных чисел;
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;	
$\mathbb{Z}$	— множество всех целых чисел;
$\begin{cases} \ldots \\ \ldots \end{cases}$	— знак системы, означающий, что должны выполняться все условия, объединённые этим знаком;
$\left[\begin{array}{l} \ldots \\ \ldots \end{array}\right.$	— знак совокупности, означающий, что должно выполняться хотя бы одно из условий, объединённых этим знаком.

Часть I. **ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ**

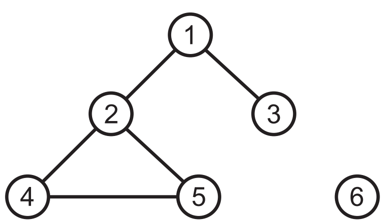
В этом пособии приведены задачи, при решении которых используется теория графов.

Теория графов не изучается в 5–7 классах общеобразовательных школ. Однако есть задачи, которые легко решаются с помощью теории графов и трудно или даже очень трудно решаются другими способами. И хотя теория графов не изучается в обычной школе, для её понимания и освоения достаточно знаний по математике, которые даются в средней школе. Определим понятие графа[1)].

Пусть задано некоторое непустое множество элементов V и множество E пар различных элементов из V. Элементы множества V называются *вершинами* графа, элементы множества E называются *рёбрами* графа, а пара (V, E), то есть множество вершин и рёбер, называется *графом*.

Для наглядности обычно используют геометрическое представление графа. Вершины графа изображаются точками на плоскости. Если две вершины образуют ребро, то соответствующие две точки соединяют отрезком.

Например, на рисунке изображён граф G, заданный множеством вершин $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и множеством рёбер $E = \{(1;2), (1;3), (2;4), (2;5), (4;5)\}$.



Две вершины, соединённые ребром, называются *смежными*; они также называются *концами* этого ребра. При этом говорят, что ребро *выходит* из вершины. Число рёбер, выходящих из

[1)] Для желающих более подробно разобраться с теорией графов рекомендуем книгу [7].

вершины v, называется *степенью* вершины v и обозначается $d(v)$. Две вершины, не соединённые ребром, называются *несмежными*.

Для графа, изображённого на рисунке, $d(1) = 2$, $d(2) = 3$, $d(3) = 1$, $d(4) = 2$, $d(5) = 2$, $d(6) = 0$. Вершина степени 0 называется *изолированной* (вершина 6 — изолированная), вершина степени 1 называется *висячей* (вершина 3 — висячая). Вершины 1 и 2 являются смежными, а вершины 2 и 3 — несмежными.

Часто удобно рассматривать не весь граф, а какую-то его часть — подграф. Граф H называется *подграфом* графа G, если вершины и рёбра графа H принадлежат графу G. Подграф H графа G называется *подграфом, порождённым множеством вершин* $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$, если он содержит вершины $v_1, v_2, \ldots, v_p$ и все рёбра графа G, соединяющие эти вершины. Подграф H графа G называется *подграфом, порождённым множеством рёбер* $\{e_1, e_2, \ldots, e_s\}$, если он содержит рёбра $e_1, e_2, \ldots, e_s$ и все вершины графа G, являющиеся концами этих рёбер.

В графе G, изображённом на рисунке, можно выделить, например, два подграфа: H_1 с вершинами $\{1, 2, 3\}$ и рёбрами $\{(1; 2), (1; 3)\}$ и H_2 с вершинами $\{2, 4, 5\}$ и рёбрами $\{(2; 4), (2; 5), (4; 5)\}$. При этом подграф H_1 порождён множеством вершин $\{1, 2, 3\}$ или множеством рёбер $\{(1; 2), (1; 3)\}$, а подграф H_2 порождён множеством вершин $\{2, 4, 5\}$ или множеством рёбер $\{(2; 4), (2; 5), (4; 5)\}$.

1. Вводные задачи

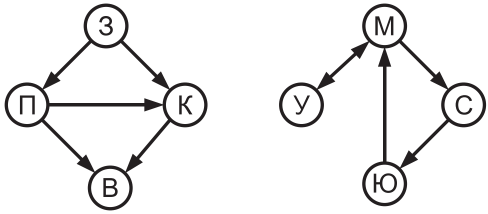
Теоретический материал

В этом разделе приведены вводные задачи на графы, в которых надо нарисовать соответствующий граф и исследовать его.

Примеры решения задач

Пример 1. Между планетами введено космическое сообщение по следующим маршрутам: З—К, П—В, З—П, П—К, К—В, У—М, М—С, С—Ю, Ю—М, М—У. Можно ли добраться с З до М?

Решение. Нарисуем схему, в которой планетам будут соответствовать точки, а соединяющим их маршрутам — направленные непересекающиеся между собой линии.



Из рисунка видно, что получившийся граф состоит из двух подграфов, не связанных между собой. При этом планеты З и М находятся в разных подграфах, поэтому долететь с планеты З до планеты М нельзя.

Ответ. Нет.

Пример 2. В 15-этажном доме имеется лифт с двумя кнопками: «+7» и «−9». Можно ли проехать с 3-го этажа на 12-й?

Решение. Приведём два способа решения: в первом способе разберём, до каких этажей можно добраться, стартуя с 3-го этажа, а во втором, наоборот, посмотрим, с каких этажей можно попасть на 12-й этаж.

Первый способ. С 3-го этажа за один «ход» можно попасть только на 10-й, оттуда — только на 1-й, потом — на 8-й, на 15-й, на 6-й, на 13-й, на 4-й, на 11-й, на 2-й и, наконец, на 9-й. А с 9-го этажа никуда проехать нельзя. Поэтому до 12-го этажа проехать не удастся. Графически это можно изобразить так:

$$3 \to 10 \to 1 \to 8 \to 15 \to 6 \to 13 \to 4 \to 11 \to 2 \to 9.$$

Второй способ. На 12-й этаж за один «ход» можно попасть только с 5-го, туда — только с 14-го, туда — только с 7-го. А на 7-й этаж приехать ниоткуда нельзя.

$$12 \leftarrow 5 \leftarrow 14 \leftarrow 7.$$

Ответ. Нет.

Пример 3. 30 команд сыграли турнир по олимпийской системе. Сколько всего было сыграно матчей?

Решение. В этой задаче можно не рисовать никаких графов. За одну игру из турнира с олимпийской системой выбывает ровно одна команда. Значит, для определения победителя необходимо сыграть 29 игр, чтобы выбыло 29 команд и осталась одна — победитель.

Ответ. 29 команд.

Задачи

1. 5-6 Дима, приехав из Врунляндии, рассказал, что там есть несколько озёр, соединённых между собой реками. Из каждого озера вытекают три реки, и в каждое озеро впадают четыре реки. Доказать, что он ошибается.

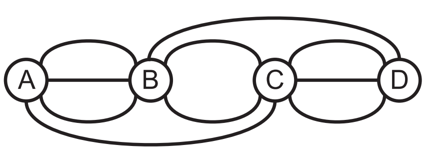
2. 5-6 Школьный драмкружок, готовясь к постановке отрывка из сказки А. С. Пушкина о царе Салтане, решил распределить роли между участниками.
— Я буду Черномором, — сказал Юра.
— Нет, Черномором буду я, — заявил Коля.
— Ладно, — уступил ему Юра, — я могу сыграть Гвидона.
— Ну, я могу стать Салтаном, — тоже проявил уступчивость Коля.
— Я же согласен быть только Гвидоном! — произнёс Миша.
Желания мальчиков были удовлетворены. Как распределились роли?

3. 5-6 Между девятью планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля—Меркурий, Плутон—Венера, Земля—Плутон, Плутон—Меркурий, Меркурий—Венера, Уран—Нептун, Нептун—Сатурн, Сатурн—Юпитер, Юпитер—Марс и Марс—Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?

4. 6-7 Король хочет построить шесть крепостей и соединить каждые две из них дорогой. Начертите такую схему расположения крепостей и дорог, чтобы на ней было только три перекрёстка и на каждом из них пересекались две дороги.

5. 6-7 Пешеход обошёл шесть улиц одного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую лишь раз. Могло ли это быть?

6. 6-7 Города A, B, C и D соединены дорогами так, как показано на рисунке. Сколькими способами можно проделать путь из города A в город D, побывав в каждом городе ровно по одному разу?



7. $\boxed{6\text{-}7}$ В 20-этажном доме испорчен лифт: он может либо подниматься на 8 этажей вверх, либо спускаться на 13 этажей вниз. Можно ли с помощью этого лифта попасть с 20-го этажа на 1-й? (Когда сверху меньше 8 этажей, лифт вверх не пойдёт. Аналогично — вниз.)

8. $\boxed{6\text{-}7}$ Лифт в 100-этажном доме имеет две кнопки: «+7» и «−9». (Первая поднимает лифт на 7 этажей, вторая опускает на 9.) Можно ли проехать:
   а) с 1-го на 2-й этаж;
   б) со 2-го на 1-й этаж;
   в) с любого на любой этаж?

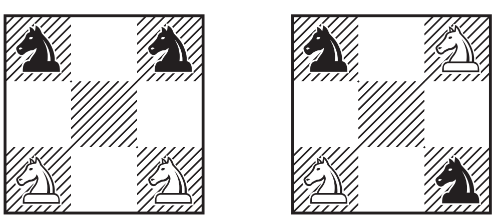
9. $\boxed{6\text{-}7}$ По столбу высотой 15 метров ползёт улитка. За день она поднимается на 4 метра, за ночь опускается на 3 метра. Через какое время она достигнет вершины столба?

10. $\boxed{6\text{-}7}$ 32 теннисиста играют по олимпийской системе (проигравший выбывает). За какое наименьшее количество встреч можно определить победителя?

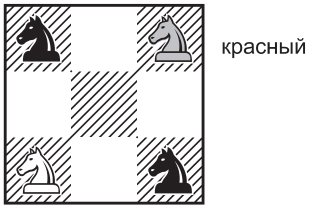
11. $\boxed{6\text{-}7}$ 32 теннисиста играют по олимпийской системе (проигравший выбывает). За какое наименьшее количество встреч можно определить двух сильнейших теннисистов?

12. $\boxed{6\text{-}7}$ В стране Цифра есть девять городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр — названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться самолётом из города 1 в город 9?

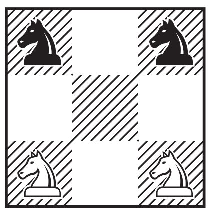
13. $\boxed{6\text{-}7}$ Можно ли, сделав несколько ходов конями из положения на рисунке слева, расположить их так, как показано на рисунке справа?



14. [6-7] Заменим на втором рисунке задачи 13 одного из белых коней красным. Как поменять местами белого и красного коней за наименьшее число ходов?

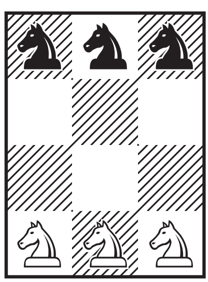


15. [6-7] Имеется шахматная доска 3×3, в верхних двух её углах стоят два чёрных коня, в нижних — два белых. За 16 ходов поставьте белых коней на место чёрных, а чёрных — на место белых и докажите, что за меньшее число ходов это сделать невозможно.



16. [6-7] Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски 4×4 выкинуть угловые клетки. Можно ли обойти её ходом коня и вернуться на исходное поле, побывав на всех полях ровно по разу?

17. [6-7] Имеется шахматная доска 3×4, в верхних трёх её клетках стоят три чёрных коня, в нижних — три белых. За наименьшее число ходов поменяйте местами трёх белых и трёх чёрных коней.



18. $\boxed{6\text{-}7}$ Можно ли на клетчатой бумаге закрасить 15 клеток так, чтобы у каждой из них было а) чётное; б) нечётное число закрашенных соседей? (Клетки называются соседями, если они имеют общую сторону.)

19. $\boxed{6\text{-}7}$ В городе X с любой станции метро можно проехать на любую другую. При каких условиях одну из станций можно закрыть на ремонт без права проезда через неё так, чтобы с любой из оставшихся станций можно было проехать на любую другую?

20. $\boxed{6\text{-}7}$ Доказать, что из любых шести человек всегда найдутся трое попарно знакомых или трое попарно незнакомых между собой.

21. $\boxed{6\text{-}7}$ Шахматный турнир проводится по круговой системе. Это означает, что каждая пара игроков встречается между собой ровно один раз. В турнире участвуют семь школьников. Известно, что Ваня сыграл шесть партий, Толя — пять, Лёша и Дима — по три, Семён и Илья — по две, Женя — одну. С кем сыграл Лёша?

22. $\boxed{6\text{-}7}$ В шахматном турнире по круговой системе, в котором участвуют 5 школьников, сыграно 6 партий. Больше всех встреч провели Ваня и Миша — по 3. Какое число партий сыграл участник, проведший наименьшее количество встреч?

23. $\boxed{6\text{-}7}$ Спортивный турнир проводится по круговой системе. Доказать, что в любой момент времени найдутся хотя бы два игрока, проведшие одинаковое число встреч.

24. $\boxed{6\text{-}7}$ На плоскости расположено конечное число точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Некоторые пары точек соединены отрезками. Доказать, что существуют две точки, из которых выходит одно и то же число отрезков.

2. Степень вершины, подсчёт числа рёбер

Теоретический материал

В этом разделе приведены задачи, в которых при решении используется подсчёт степеней вершин и числа рёбер. Напомним, что *степенью вершины* называется количество рёбер, выходящих из этой вершины. Вершина графа, имеющая нечётную степень, называется *нечётной*, а вершина, имеющая чётную степень, — *чётной*.

Примеры решения задач

Пример 1. В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

Решение. Рассмотрим граф, вершины которого соответствуют городам, а рёбра — соединяющим их дорогам. В графе всего 100 вершин, степень каждой вершины равна 4. Посчитаем количество рёбер в этом графе. Для этого сложим степени всех его вершин. Так как при таком подсчёте каждое ребро учтено дважды (поскольку каждое ребро всегда соединяет ровно две вершины), то число рёбер графа равно $100 \cdot \frac{4}{2} = 200$. Это и есть общее число дорог.

Ответ. 200 дорог.

> ***Замечание.*** При решении этой задачи мы доказали известную лемму о рукопожатиях:
> *Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу рёбер.*

Пример 2. В некотором городе 2015 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединён с пятнадцатью другими?

Решение. Предположим, что это возможно. Рассмотрим граф, вершины которого соответствуют телефонам, а рёбра — соединяющим их проводам. В графе всего 2015 вершин, степень каждой вершины равна 15. Тогда число рёбер графа должно быть равно $2015 \cdot \frac{15}{2}$. Но это число не является целым. Поэтому такого графа не существует и наше предположение неверно. Значит, соединить телефоны требуемым образом нельзя.

Ответ. Нельзя.

Замечание. Из леммы о рукопожатиях вытекает очень полезное следствие, которое мы доказали в этой задаче:
В любом графе число вершин нечётной степени чётно.

Пример 3. Марсиане очень любят исполнять танцы, в которых нужно браться за руки. В танце «Дружба» может участвовать не более 7 марсиан, у каждого из которых не более трёх рук. Какое наибольшее число рук может быть у танцующих, если любая рука одного марсианина держит ровно одну руку другого марсианина?

Решение. Построим граф G, в котором вершины будут обозначать марсиан, и две вершины соединены ребром, если соответствующие им марсиане взялись за руки. Тогда степень вершины будет соответствовать количеству рук марсианина, а сумма степеней — числу рук, участвующих в танце. По следствию из леммы о рукопожатиях граф не может иметь 7 вершин нечётной степени. Поэтому наибольшая возможная сумма степеней графа G получится, если граф будет иметь 6 вершин степени 3 и одну вершину степени 2. Тогда у танцующих будет 20 рук. (Самостоятельно постройте граф, имеющий требуемые степени вершин.)

Ответ. 20 рук.

Задачи

1. $\boxed{5\text{-}6}$ а) В государстве 50 городов, и из каждого выходит 8 дорог. Сколько всего дорог в государстве?

   б) В соревнованиях по круговой системе с двенадцатью участниками провели все встречи. Сколько встреч было сыграно?

2. $\boxed{5\text{-}6}$ В турнире участвовали шесть шахматистов. Каждые два участника турнира сыграли между собой по одной партии. Сколько всего было сыграно партий? Сколько партий сыграл каждый участник? Сколько очков набрали шахматисты все вместе?

3. [5-6] а) Группа, в составе которой Пётр совершил туристическую поездку, состояла из пятнадцати человек. Вернувшись из путешествия, Пётр рассказал, что каждый участник группы был ранее знаком ровно с пятью другими участниками. Возможно ли это?

   б) Резидент одной иностранной разведки сообщил в центр о готовящемся подписании ряда двусторонних соглашений между пятнадцатью бывшими республиками СССР. Согласно его донесению, каждая из них заключит договор ровно с тремя другими. Заслуживает ли резидент доверия?

4. [5-6] Школьник сказал своему приятелю Вите Иванову:

   — У нас в классе тридцать пять человек. И представь, каждый из них дружит ровно с одиннадцатью одноклассниками.

   — Не может этого быть, — сразу ответил Витя Иванов, победитель математической олимпиады.

   Почему он так решил?

5. [5-6] Одиннадцать школьников, уезжая на каникулы, договорились, что каждый из них пошлёт письма трём из остальных. Может ли оказаться, что каждый получит письма от тех, кому напишет сам?

6. [5-6] Можно ли на плоскости так нарисовать 9 отрезков, чтобы каждый из них пересекался ровно с тремя другими?

7. [7] Существует ли многогранник с нечётным числом граней, все грани которого — многоугольники с нечётным числом сторон?

8. [5-6] Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит ровно три дороги, быть ровно 100 дорог между городами?

9. [5-6] а) В турнире принимают участие 15 шахматистов. Может ли быть, чтобы в некоторый момент каждый из них сыграл ровно 7 партий?

   б) Можно ли 1973 телефона соединить между собой так, чтобы каждый был соединён с 1971 телефоном?

10. [5-6] В школе 953 ученика. Одни из них знакомы, другие не знакомы друг с другом. Доказать, что хотя бы у одного из них число знакомых среди учеников этой школы чётно.

11. [5-6] а) В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по три друга в этом классе, 11 — по 4 друга, а 10 — по 5 друзей?

б) В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы было 4 телефона, каждый из которых соединён с тремя другими, 8 телефонов, каждый из которых соединён с шестью, и 3 телефона, каждый из которых соединён с пятью другими?

12. $\boxed{5\text{-}6}$ а) У короля 19 баронов-вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассального баронства 1, 5 или 9 соседних баронств?

б) На третье занятие кружка по математике пришло 17 человек. Может ли случиться так, что каждая девочка знакома ровно с тремя из присутствующих на занятии кружковцев, а каждый мальчик — ровно с пятью?

13. $\boxed{5\text{-}6}$ В Диснейленде на озере семь островов, из каждого из них выходит один, три или пять мостов. Доказать, что хотя бы один из мостов ведёт на берег.

14. $\boxed{5\text{-}6}$ а) Доказать, что число людей, живших когда-либо на Земле и сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.

б) У марсиан бывает произвольное число рук. Однажды все марсиане взялись за руки так, что свободных рук не осталось. Доказать, что число марсиан, у которых нечётное число рук, чётно.

15. $\boxed{5\text{-}7}$ В танце «Большая дружба» может участвовать не менее семи марсиан, у каждого из которых не менее пяти рук. Какое наименьшее число рук может быть у танцующих, если любая рука одного марсианина держит ровно одну руку другого марсианина?

16. $\boxed{6\text{-}7}$ На столе лежат журналы. Каждый посетитель просмотрел два журнала, каждый журнал просмотрели три человека. Для каждой пары журналов есть только один посетитель, который их просмотрел. Сколько журналов и посетителей?

17. $\boxed{5\text{-}6}$ В городе N от каждой площади отходит ровно 5 улиц, соединяющих площади. Доказать, что число площадей чётно, а число улиц делится на 5.

18. $\boxed{6\text{-}7}$ а) На кошачьей выставке каждый посетитель погладил ровно трёх кошек. При этом оказалось, что каждую кошку погладили ровно три посетителя. Доказать, что посетителей было ровно столько же, сколько кошек.

[. . .]

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Серия книг **«ВМК МГУ–школе»** – результат многолетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова. В серию входят пособия по алгебре, геометрии, физике и информатике. Все они предназначены для подготовки и успешной сдачи ГИА и ЕГЭ, а также поступления в престижные вузы страны.

Олимпиадная математика – новое направление серии «ВМК МГУ–школе». Его основная задача – научить школьников всех возрастов решать задачи повышенной сложности.

Настоящее пособие предназначено для учащихся 5–7 классов и является пятым в серии пособий по олимпиадным математическим задачам. Выпущены ещё несколько книг для 5–7 классов – по другим разделам математики, также готовятся сборники задач для 8–9 и 10–11 классов.

Большинство олимпиадных задач, особенно для младшей и средней школы, не намного сложнее обычных школьных задач по математике. Поэтому не бойтесь их. Они только все вместе выглядят страшными, а каждая задача по отдельности вполне вам по силам. Берите их и решайте!