Вступительное слово

Несколько поколений студентов механико-математического факультета Московского университета учились у Игоря Владимировича Проскурякова по его задачнику. Вначале это был задачник по линейной алгебре, но затем по велению времени в него были включены дополнительные разделы, такие, как аффинная геометрия, тензорная алгебра и теория групп. Почти в каждое новое издание вносились исправления и дополнения, так что в настоящем виде задачник является плодом кропотливого труда всей жизни автора.

Каждый, кому пришлось составить хотя бы несколько задач для вступительных экзаменов, знает, как трудно избежать ошибок. Что уж говорить о целом задачнике! Одно из достоинств задачника И. В. Проскурякова состоит в том, что он свободен от ошибок: все имевшиеся ошибки давно исправлены.

Задачник содержит как достаточное количество типовых вычислительных задач на применение основных алгоритмов линейной алгебры, так и большое число более сложных задач, в том числе теоретического характера. Тем самым он предоставляет преподавателю возможность для маневра в соответствии с содержанием конкретного курса и составом конкретной группы.

Следует сказать, что содержание курса алгебры и способ изложения постоянно меняются. Поэтому некоторые разделы любого задачника в какой-то момент могут казаться архаичными, но при определенном повороте событий они вновь могут стать актуальными. Так, в последние годы на мехмате принято выводить жорданову форму матрицы линейного оператора геометрически, в связи с чем теория λ-матриц становится ненужной, Однако эта теория, представляющая собой в сущности теорию модулей над кольцом многочленов, выглядит вполне актуально в контексте общей теории модулей над евклидовыми кольцами, которую сейчас все больше лекторов начинают включать в свои курсы. То же относится и к отдельным задачам, которые многие годы могут оставаться невостребованными, но потом вдруг обратить на себя внимание своей забытой красотой или оказаться для чего-то нужными. Задачник И. В. Проскурякова является аккумулятором опыта математиков, работавших на кафедре высшей алгебры мехмата на протяжении десятков лет, и в этом качестве может быть источником ценных сведений. Например, в моей научной работе, когда мне было нужно вычислить определитель матрицы, я часто находил ответ в этом задачнике. Я уверен, что задачник И. В. Проскурякова еще долгие годы будет полезен студентам и преподавателям физико-математических, инженерно-физических и экономико-математических специальностей вузов.

Э. Б. Винберг

доктор физико-математических наук,
профессор Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Предисловие автора

При составлении настоящего пособия автор стремился, во-первых, дать достаточное число упражнений для выработки навыков решения типовых задач (например, вычисление определителей с числовыми элементами, решение систем линейных уравнений с числовыми коэффициентами и т. п.), во-вторых, дать задачи, способствующие уяснению основных понятий и их взаимной связи (например, связь свойств матриц со свойствами квадратичных форм, с одной стороны, и линейных преобразований — с другой), в-третьих, дать задачи, дополняющие лекционные курсы и содействующие расширению математического кругозора (например, свойства пфаффова агрегата кососимметрнческого определителя, свойства ассоциированных матриц и т. п.).

В ряде задач предлагается доказать теоремы, которые можно найти в учебниках. Помещая такие задачи, автор исходил из того, что лектор при недостатке времени дает изучить часть материала по книге самим учащимся и это можно делать по задачнику, где даны указания, помогающие самостоятельно провести доказательство, что способствует развитию начальных навыков научного исследования.

Содержание и порядок изложения материала на лекциях во многом зависят от лектора. Автор старался дать задачи, учитывающие это разнообразие изложения. Отсюда некоторый параллелизм и повторяемость материала. Так, одни и те же факты даны сначала в разделе квадратичных форм, а затем и в разделе линейных преобразований, некоторые задачи сформулированы так, что их можно решать как в случае вещественного евклидова, так и в случаях комплексного унитарного пространства. Нам кажется, что для задачника это желательно, так как дает большую гибкость при его использовании.

В начале некоторых параграфов помещены введения. Они содержат лишь краткие указания терминологии и обозначений в тех случаях, когда в учебниках нет полного единства в указанном отношении. Исключением является введение 5, где даны основные методы вычисления определителей любого порядка и приведены примеры на каждый метод. Автор считал это полезным ввиду того, что в учебниках эти указания отсутствуют, а учащиеся встречают здесь значительные трудности.

Номера задач, в ответах на которые имеются решения или указания, снабжены звездочкой. Решения даны для небольшого числа задач. Это или задачи, содержащие общий метод, применяемый затем к ряду других задач, или задачи повышенной трудности. Указания содержат, как правило, лишь идею или метод решения и оставляют учащимся проведение самого решения. Лишь для более трудных задач они содержат краткий план решения.

И. В. Проскуряков

Выражаю свою благодарность за предложенные задачи и ценные советы Э. Б. Винбергу, И. М. Гельфанду, Н. В. Ефимову, А. П. Мишиной, Л. Я. Окуневу, Л. А. Скорнякову, А. И. Узкову, И. Р. Шафаревичу и всем работникам кафедры высшей алгебры Московского университета.

Отдел 1

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§ 1. Определители 2-го и 3-го порядков

Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$. **4.** $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$. **7.** $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$. **8.** $\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$. **10.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$. **11.** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} \sin\alpha+\sin\beta & \cos\beta+\cos\alpha \\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha-\sin\beta \end{vmatrix}$. **13.** $\begin{vmatrix} 2\sin\varphi\cos\varphi & 2\sin^2\varphi-1 \\ 2\cos^2\varphi-1 & 2\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix}$.

14. $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$. **15.** $\begin{vmatrix} \dfrac{(1-t)^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{2t}{1+t^2} & -\dfrac{(1+t)^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} \dfrac{1+t^2}{1-t^2} & \dfrac{2t}{1-t^2} \\ \dfrac{2t}{1-t^2} & \dfrac{1+t^2}{1-t^2} \end{vmatrix}$. **17.** $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$.

Вычислить определители, в которых $i = \sqrt{-1}$:

18. $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$. **19.** $\begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} \cos\alpha+i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha-i\sin\alpha \end{vmatrix}$. **21.** $\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$.

Пользуясь определителями, решить системы уравнений:

22. $2x+5y=1,$
$3x+7y=2.$

23. $2x-3y=4,$
$4x-5y=10.$

24. $5x + 7y = 1,$
$x - 2y = 0.$

25. $4x + 7y + 13 = 0,$
$5x + 8y + 14 = 0.$

26. $x\cos\alpha - y\sin\alpha = \cos\beta,$
$x\sin\alpha + y\cos\alpha = \sin\beta.$

27. $x\,\mathrm{tg}\alpha + y = \sin(\alpha + \beta),$
$x - y\,\mathrm{tg}\alpha = \cos(\alpha + \beta),$
где $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (k – целое).

Исследовать, будет ли система уравнений определенна (имеет единственное решение), неопределенна (имеет бесконечно много решений) или противоречива (не имеет решения):

28. $4x + 6y = 2,$
$6x + 9y = 3.$
Дают ли здесь формулы Крамера верный ответ?

29. $3x - 2y = 2,$
$6x - 4y = 3.$

30. $(a - b)x = b - c.$

31. $x\sin\alpha = 1 + \sin\alpha.$

32. $x\sin\alpha = 1 + \cos\alpha.$

33. $x\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha + \sin\beta.$

34. $a^2x = ab,$
$abx = b^2.$

35. $ax + by = ad,$
$bx + cy = bd.$

36. $ax + 4y = 2,$
$9x + ay = 3.$

37. $ax - 9y = 6,$
$10x - by = 10.$

38. Доказать, что для равенства нулю определителя второго порядка необходимо и достаточно, чтобы его строки были пропорциональны. То же верно и для столбцов (если некоторые элементы определителя равны нулю, то пропорциональность можно понимать в том смысле, что элементы одной строчки получаются из соответствующих элементов другой строчки умножением на одно и то же число, быть может, равное нулю).

39.* Доказать, что при действительных a, b, c корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a - x & b \\ b & c - x \end{vmatrix} = 0$$

будут действительными.

40.* Доказать, что квадратный трехчлен $ax^2 + 2bx + c$ с комплексными коэффициентами тогда и только тогда будет полным квадратом, если

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0.$$

41. Доказать, что при действительных a, b, c, d корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a - x & c + di \\ c - di & b - x. \end{vmatrix} = 0$$

будут действительными.

42*. Показать, что значение дроби $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, где по крайней мере одно из чисел c, d отлично от нуля, тогда и только тогда не зависит от значения x, когда $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$.

Вычислить определители 3-го порядка:

43. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. **44.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$. **45.** $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$.

46. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$. **47.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$. **48.** $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

49. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$. **50.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. **51.** $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$. **52.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

53. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$. **54.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$. **55.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **56.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

57. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$. **58.** $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$. **59.** $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$.

60. $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$. **61.** $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$.

62. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$. **63.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$.

64. При каком условии справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}?$$

65. Показать, что определитель

$$\begin{vmatrix} a^2 & b\sin\alpha & c\sin\alpha \\ b\sin\alpha & 1 & \cos\alpha \\ c\sin\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

и два других определителя, полученные из данного круговой перестановкой элементов a, b, c и α, β, γ, равны нулю, если a, b, c — длины сторон треугольника и α, β, γ — его углы, противолежащие соответственно сторонам a, b, c.

Вычислить определители 3-го порядка, в которых $i = \sqrt{-1}$:

66. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$. **67.** $\begin{vmatrix} x & a+bi & c+di \\ a-bi & y & e+fi \\ c-di & e-fi & z \end{vmatrix}$.

68. $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}$, где $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

69. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix}$, где $\varepsilon = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$.

70. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}$, где $\varepsilon = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi$.

71. Доказать, что если все элементы определителя 3-го порядка равны ±1,то сам определитель будет четным числом.

72*. Найти наибольшее значение, которое может принимать определитель 3-го порядка, при условии, что все его элементы равны ±1.

73*. Найти наибольшее значение определителя 3-го порядка при условии, что его элементы равны $+1$ или 0.

Пользуясь определителями, решить системы уравнений:

74. $\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 10, \\ 3x + 7y + 4z &= 3, \\ x + 2y + 2z &= 3. \end{aligned}$

75. $\begin{aligned} 5x - 6y + 4z &= 3, \\ 3x - 3y + 2z &= 2, \\ 4x - 5y + 2z &= 1. \end{aligned}$

76. $\begin{aligned} 4x - 3y + 2z + 4 &= 0, \\ 6x - 2y + 3z + 1 &= 0, \\ 5x - 3y + 2z + 3 &= 0. \end{aligned}$

77. $\begin{aligned} 5x + 2y + 3z + 2 &= 0, \\ 2x - 2y + 5z &= 0, \\ 3x + 4y + 2z + 10 &= 0. \end{aligned}$

78*. $\begin{aligned} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 2 &= 0, \\ -\frac{2y}{b} + \frac{3z}{c} - 1 &= 0, \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= 0. \end{aligned}$

79. $\begin{aligned} 2ax - 3by + cz &= 0, \\ 3ax - 6by + 5cz &= 2abc, \\ 5ax - 4by + 2cz &= 3abc, \end{aligned}$
где $abc \neq 0$.

80*. $\begin{aligned} 4bcx + acy - 2abz &= 0, \\ 5bcx + 3acy - 4abz + abc &= 0, \\ 3bcx + 2acy - abz - 4abc &= 0, \end{aligned}$ где $abc \neq 0$.

81.* Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} x+\ \ y+\ \ z&=a,\\ x+\ \varepsilon y+\varepsilon^2 z&=b,\\ x+\varepsilon^2 y+\ \varepsilon z&=c \end{aligned}$$

(ε — отличное от 1 значение $\sqrt[3]{1}$).

Исследовать, будет система уравнений определенна, неопределенна или противоречива:

82. $\begin{aligned} 2x-3y+\ z&=2,\\ 3x-5y+5z&=3,\\ 5x-8y+6z&=5. \end{aligned}$

83. $\begin{aligned} 4x+3y+2z&=1,\\ x+3y+5z&=1,\\ 3x+6y+9z&=2. \end{aligned}$

84. $\begin{aligned} 5x-6y+\ z&=4,\\ 3x-5y-2z&=3,\\ 2x-\ y+3z&=5. \end{aligned}$

85. $\begin{aligned} 2x-\ y+3z&=4,\\ 3x-2y+2z&=3,\\ 5x-4y\qquad&=2. \end{aligned}$

86. $\begin{aligned} 2ax-23y+29z&=4,\\ 7x+\ ay+\ 4z&=7,\\ 5x+\ 2y+\ az&=5. \end{aligned}$

87. $\begin{aligned} ax-3y+\ 5z&=4,\\ x-ay+\ 3z&=2,\\ 9x-7y+8az&=0. \end{aligned}$

88. $\begin{aligned} ax+4y+\ z\qquad&=0,\\ 2y+3z-1&=0,\\ 3x\qquad-bz+2&=0. \end{aligned}$

89. $\begin{aligned} ax\qquad+2z&=2,\\ 5x+2y\qquad&=1,\\ x-2y+bz&=3. \end{aligned}$

Путем прямого вычисления по правилу треугольников, или правилу Саррюса, доказать следующие свойства определителей 3-го порядка:

90. Если в определителе 3-го порядка поменять ролями строки и столбцы (т. е., как говорят, транспонировать его матрицу), то определитель не изменится.

91. Если все элементы какой-нибудь строки (или столбца) равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

92. Если все элементы какой-нибудь строки (или столбца) определителя умножить на одно и то же число, то и весь определитель умножится на это число.

93. Если переставить две строки (или два столбца) определителя, то он изменит знак.

94. Если две строки (или два столбца) определителя одинаковы, то он равен нулю.

95. Если все элементы одной строки пропорциональны соответствующим элементам другой строки, то определитель равен нулю (то же верно и для столбцов).

96. Если каждый элемент некоторой строки определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме данной, прежние, а в данной строке в первом определителе стоят первые, а во втором — вторые слагаемые (то же верно и для столбцов).

97. Если к элементам одной строки определителя прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится (то же верно и для столбцов).

98. Говорят, что одна строка определителя является *линейной комбинацией* остальных строк, если каждый элемент этой строки равен сумме произведений соответствующих элементов остальных строк на некоторые числа, постоянные для каждой строки, т. е. не зависящие от номера элемента в строке. Аналогично определяется линейная комбинация столбцов. Например: третья строка определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

будет линейной комбинацией первых двух, если существуют два числа c_1 и c_2 такие, что $a_{3j} = c_1 a_{1j} + c_2 a_{2j}$ $(j = 1, 2, 3)$.

Доказать, что если одна строка (столбец) определителя 3-го порядка является линейной комбинацией остальных строк (столбцов), то определитель равен нулю.

Замечание. Справедливо также обратное утверждение, но оно вытекает из дальнейшего развития теории определителей.

99*. Пользуясь предыдущей задачей, показать на примере, что в отличие от определителей 2-го порядка (см. задачу 38) для равенства нулю определителя 3-го порядка пропорциональность двух строк (или столбцов) уже не является необходимой.

Пользуясь свойствами определителей 3-го порядка, указанными в задачах 91–98, вычислить следующие определители:

100. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$. **101.** $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$.

102. $\begin{vmatrix} x & x' & ax+bx' \\ y & y' & ay+by' \\ z & z' & az+bz' \end{vmatrix}$. **103.** $\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^2 & a_1^2+b_1^2 & a_1b_1 \\ (a_2+b_2)^2 & a_2^2+b_2^2 & a_2b_2 \\ (a_3+b_3)^2 & a_3^2+b_3^2 & a_3b_3 \end{vmatrix}$.

104. $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$. **105.** $\begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x-a^{-x})^2 & 1 \\ (b^y+b^{-y})^2 & (b^y-b^{-y})^2 & 1 \\ (c^z+c^{-z})^2 & (c^z-c^{-z})^2 & 1 \end{vmatrix}$.

106. $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix}$, где ε — отличное от 1 значение $\sqrt[3]{1}$.

107. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$.

108. $\begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1i-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2i & a_2i-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3i & a_3i-b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, где $i=\sqrt{-1}$.

109. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} & \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} & 1 \end{vmatrix}$

(дать геометрическое истолкование полученного результата).

110.* $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$, где α, β, γ — корни уравнения $x^3+px+q=0$.

Не развертывая определителей, доказать следующие тождества:

111. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

112. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

113. $\begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1i+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2i & a_2i+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3i & a_3i+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

114. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

115. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

116. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

117. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-d)$.

118. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+ac+bc)(b-a)(c-a)(c-d).$

119. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)(b-a)(c-a)(c-b).$

120.* $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$ **121.** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

122. $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

§ 2. Перестановки и подстановки

Определить число инверсий в перестановках (за исходное расположение всегда, если нет особых указаний, принимается расположение $1, 2, 3, \ldots$ в возрастающем порядке):

123. 2, 3, 5, 4, 1.

124. 6, 3, 1, 2, 5, 4.

125. 1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8.

126. 7, 5, 6, 4, 1, 3, 2.

127. $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, 2, 4, 6, 8, \ldots, 2n.$

128. $2, 4, 6, \ldots, 2n, 1, 3, 5, \ldots, 2n-1.$

В следующих перестановках определить число инверсий и указать общий признак тех чисел n, для которых эта перестановка четна, и тех, для которых она нечетна:

129. $1, 4, 7, \ldots, 3n-2, 2, 5, 8, \ldots, 3n-1, 3, 6, 9, \ldots, 3n.$

130. $3, 6, 9, \ldots, 3n, 2, 5, 8, \ldots, 3n-1, 1, 4, 7, \ldots, 3n-2.$

131. $2, 5, 8, \ldots, 3n-1, 3, 6, 9, \ldots, 3n, 1, 4, 7, \ldots, 3n-2.$

132. $2, 5, 8, \ldots, 3n-1, 1, 4, 7, \ldots, 3n-2, 3, 6, 9, \ldots, 3n.$

133. $1, 5, \ldots, 4n-3, 2, 6, \ldots, 4n-2, 3, 7, \ldots, 4n-1, 4, 8, \ldots, 4n.$

134. $1, 5, \ldots, 4n-3, 3, 7, \ldots, 4n-1, 2, 6, \ldots, 4n-2, 4, 8, \ldots, 4n.$

135. $4n, 4n-4, \ldots, 8, 4, 4n-1, 4n-5, \ldots, 7, 3, 4n-2, 4n-6, \ldots, 6, 2, 4n-3, 4n-7, \ldots, 5, 1.$

136. В какой перестановке чисел $1, 2, \ldots, n$ число инверсий наибольшее и чему оно равно?

137. Сколько инверсий образует число 1, стоящее на k-м месте перестановки?

138. Сколько инверсий образует число n, стоящее на k-м месте в перестановке чисел $1, 2, 3, \ldots, n$?

139. Чему равна сумма числа инверсий и числа порядков в любой перестановке чисел $1, 2, \ldots, n$?

140. Для каких чисел n четность числа инверсий и числа порядков во всех перестановках чисел $1, 2, \ldots, n$ одинакова и для каких противоположна?

141*. Доказать, что число инверсий в перестановке $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно числу инверсий в той перестановке индексов $1, 2, \ldots, n$, которая получается, если данную перестановку заменить исходным расположением.

142*. Показать, что от одной перестановки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ к другой перестановке $b_1, b_2, \ldots, b_n$ тех же элементов можно перейти путем не более чем $n-1$ транспозиций.

143*. Привести пример перестановки чисел $1, 2, 3, \ldots, n$, которую нельзя привести в нормальное расположение путем менее чем $n-1$ транспозиций, и доказать это.

144*. Показать, что от одной перестановки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ к любой другой перестановке $b_1, b_2, \ldots, b_n$ тех же элементов можно перейти путем не более чем $\dfrac{n(n-1)}{2}$ смежных транспозиций (т. е. транспозиций соседних элементов).

145*. Дано, что число инверсий в перестановке $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ равно k. Сколько инверсий будет в перестановке $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$?

146*. Сколько инверсий во всех перестановках n элементов вместе?

147*. Доказать, что от любой перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$, содержащей k инверсий, можно перейти к исходному расположению путем k смежных транспозиций, но нельзя перейти путем меньшего числа таких транспозиций.

148*. Доказать, что для любого целого числа k $(0 \leqslant k \leqslant C_n^2)$ существует перестановка чисел $1, 2, 3, \ldots, n$, число инверсий которой равно k.

149*. Обозначим через (n, k) число перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$, каждая из которых содержит ровно k инверсий. Вывести для числа (n, k) рекуррентное соотношение:

$$(n+1, k) = (n, k) + (n, k-1) + (n, k-2) + \ldots + (n, k-n),$$

где надо положить $(n, j) = 0$ при $j > C_n^2$ и при $j < 0$. Пользуясь этим соотношением, составить таблицу чисел (n, k) для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ и $k = 0, 1, 2, \ldots, 15$.

150*. Показать, что число перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$, содержащих k инверсий, равно числу перестановок тех же чисел, содержащих $C_n^2 - k$ инверсий.

Следующие подстановки разложить в произведение независимых циклов и по декременту (т. е. разности между числом действительно перемещаемых элементов и числом циклов) определить их четность. Для удобства подсчета декремента можно для чисел, остающихся на месте, ввести в разложение одночленные циклы.

151. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

152. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

153. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

154. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

155. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

156. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

157. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \ldots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$.

158. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & \ldots & 3n & 3n-1 & 3n-2 \end{pmatrix}$.

159. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-3 & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 2n-1 & 2n & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

160. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & \ldots & 3n-1 & 3n & 3n-2 \end{pmatrix}$.

161. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

162. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & nk-k+1 & nk-k+2 & \ldots & nk \\ k+1 & k+2 & \ldots & 2k & \ldots & 1 & 2 & \ldots & k \end{pmatrix}$.

В следующих подстановках перейти от записи в циклах к записи двумя строками:

163. $(1\,5)(2\,3\,4)$.

164. $(1\,3)(2\,5)(4)$.

165. $(7\,5\,3\,1)(2\,4\;6)(8)(9)$.

166. $(1\,2)(3\,4)\ldots(2n-1, 2n)$.

167. $(1, 2, 3, 4, \ldots, 2n-1, 2n)$.

168. $(3\,2\,1)(6\,5\,4)\ldots(3n, 3n-1, 3n-2)$.

Перемножить подстановки:

169. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

170. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

171. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

172. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^2$. **173.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3$.

174. Доказать, что если некоторая степень цикла равна единице, то показатель степени делится на длину цикла. (Длиной цикла называется число его элементов.)

175. Доказать, что среди всех степеней подстановки, равных единице, наименьший показатель равен наименьшему общему кратному длин циклов, входящих в разложение подстановки.

176*. Найти A^{100}, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

177. Найти A^{150}, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

178. Найти подстановку X из равенства $AXB = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

179. Доказать, что умножение подстановки на транспозицию (т. е. двучленный цикл) (α, β) слева равносильно транспозиции (т. е. перемене местами) чисел α и β в верхней строке подстановки, а умножение на ту же транспозицию справа равносильно транспозиции α и β в нижней строке подстановки.

180. Доказать, что если числа α и β входят в один цикл подстановки, то при умножении этой подстановки на транспозицию (α, β) (слева или справа) данный цикл распадается на два цикла, а если числа α и β входят в различные циклы, то при указанном умножении эти циклы сливаются в один.

181*. Пользуясь двумя предыдущими задачами, доказать, что число инверсий и декремент любой подстановки имеют одинаковую четность.

182*. Доказать, что наименьшее число транспозиций, на произведение которых разлагается данная подстановка, равно ее декременту.

183*. Доказать, что наименьшее число транспозиций, переводящих перестановку $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в перестановку $b_1, b_2, \ldots, b_n$ тех же элементов, равно декременту подстановки

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix}.$$

184*. Найти все подстановки чисел 1, 2, 3, 4, перестановочные с подстановкой
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

185. Найти все подстановки чисел 1, 2, 3, 4, 5, перестановочные с подстановкой
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

186*. Для любых целых чисел x и m, где $m \neq 0$, обозначим через $r(x, m)$ остаток (принимаемый неотрицательным) от деления x на m. Доказать, что если $m \geqslant 2$ и a — целое число, взаимно простое с m, то соответствие $x \to r(ax, m)$, $x = 1, 2, \ldots, m-1$, является подстановкой чисел $1, 2, \ldots, m-1$.

187. Написать подстановку чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, при которой число x переходит в остаток от деления $5x$ на 9.

§ 3. Определение и простейшие свойства определителей любого порядка

Задачи этого параграфа имеют целью пояснение понятия определителя любого порядка и его простейших свойств, включая равенство нулю определителя, строки которого линейно зависимы, и разложение определителя по строке.

Задачи на развитие навыка вычисления определителей с числовыми элементами, на методы вычисления определителей специального вида, на теорему Лапласа, на умножение определителей и т. д. содержатся в следующих параграфах.

Выяснить, какие из приведенных ниже произведений входят в определители соответствующих порядков и с какими знаками:

188. $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$.

189. $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$.

190. $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$.

191. $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$.

192. $a_{12}a_{23}a_{34}\ldots a_{n-1,n}a_{kk}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

193. $a_{12}a_{23}\ldots a_{n-1,n}a_{n1}$.

194. $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}\ldots a_{2n-1,2n}a_{2n,\,2n-1}$.

195. $a_{11}a_{2,n}a_{3,n-1}\ldots a_{2n,\,2}$.

196. $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}\ldots a_{3n-2,\,3n}a_{3n-1,3n-1}a_{3n,\,3n-2}$.

197. Выбрать значения i и k так, чтобы произведение
$$a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$$
входило в определитель 6-го порядка со знаком минус.

[. . .]