

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга посвящена вопросам обоснования корректности задач для систем нелинейных уравнений, имеющих прикладное значение в математической физике, и предназначена для научных работников, студентов-математиков и аспирантов, специализирующихся в областях математического моделирования сложных систем, прикладной математики, физической кинетики и газовой динамики.

Содержание монографии сформировалось на базе исследований, проведенных автором с учениками (В. В. Русских, И. Р. Багдасаровой, М. Г. Ткаченко, М. А. Забудько, Д. А. Рыжиковым, Д. Ю. Осецким, А. В. Галкиным) с 1989 г. по 2008 г. и направлено главным образом на выявление и анализ основных математических структур, связанных с вопросами обоснования методов математического моделирования, приводящих к нелинейным системам законов сохранения, включающих систему Навье—Стокса газовой динамики, уравнения Больцмана, Смолуховского, Власова в физической кинетике. Сюда же примыкают задача Стефана и модели тепло-массопереноса, связанные с выращиванием кристаллов. Типичным явлением, порождающим возникновение функциональных решений, является отсутствие непрерывности операторов в дифференциальных уравнениях на рассматриваемых множествах решений. В частности, для обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью функциональные решения совпадают с решениями, исследованными А. Ф. Филипповым.

Доказаны теоремы о глобальной разрешимости задачи Коши для квазилинейных и полумлинейных систем, а также выделены классы однозначной разрешимости этой задачи, являющиеся пределами аппроксимаций заданного приближенного метода. Предложены принципы выделения классов корректности. Значительное внимание уделено приложениям, связанным с уравнениями Больцмана и Смолуховского, возникающими при моделировании разреженных газов и дисперсных коагулирующих систем.

Существенное влияние на стиль и содержание книги оказало обсуждение представленного материала и общение автора с А. Н. Тихоновым, А. А. Самарским, Н. С. Бахваловым, О. А. Олейник, Б. Л. Рождественским, С. Н. Кружковым, В. А. Тупчиевым, Б. Н. Четверушкиным, которым автор выражает сердечную благодарность.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ И СОПУТСТВУЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

§ 1. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Математические модели физических систем, состоящих из статистически большого количества частиц (разреженные газы, дисперсные системы, плазма), а также модели механики сплошной среды основываются на фундаментальных соотношениях баланса, носящих общее название — *законы сохранения*. Значительное количество современных исследований по теории законов сохранения связано с вопросами корректности задач для систем нелинейных дифференциальных и интегродифференциальных уравнений

$$\frac{\partial f^{(\omega)}(x, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j^{(\omega)}(f, x, t)}{\partial x_j} = S^{(\omega)}(f, x, t), \quad (1.1)$$

$$x \in \mathbb{R}_n, \quad t > 0, \quad \omega \in \Omega,$$

где $f = \{f^{(\omega)}\}$ — неизвестная вектор-функция, вид потоков F_j и источника S считаются заданными характером моделируемого физического процесса, $x \in \mathbb{R}_n$ — пространственные координаты, t — время, Ω — множество параметров ω , нумерующих уравнения.

Приложения этих уравнений широко известны, в частности, в связи с газодинамикой и гидродинамикой, физической кинетикой [111, 142, 178]. Данная глава является кратким обзором классов физических задач, относящихся к этим областям приложений систем (1.1), и носит в основном справочный характер.

Система законов сохранения (1.1) дополняется начальными данными

$$f|_{t=0} = f_0, \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad \omega \in \Omega. \quad (1.2)$$

Задача (1.1), (1.2) называется *пространственно однородной*, если она рассматривается в классе решений f , не зависящих от пространственных переменных x . В этом случае функция f является

решением более простой задачи

$$\frac{\partial f^{(\omega)}(t)}{\partial t} = S^{(\omega)}(f^{(\cdot)}(t)), \quad t > 0, \quad (1.1_0)$$

$$f|_{t=0} = f_0, \quad \omega \in \Omega. \quad (1.2_0)$$

Наряду с корректностью в круге задач для системы уравнений (1.1) (*законов сохранения*) традиционно особую роль играют такие проблемы нелинейной математической физики, как обоснование приближенных методов, используемых в процессе отыскания неизвестного решения. Подчеркнем, что практические надобности, связанные с вычислением конкретных физических параметров, приводят к вопросам определения понятия решения и отыскания функциональных пространств, в которых имеет место сходимость приближенных методов. Вопросы эти становятся особенно трудными, когда нелинейные операторы $\{F_j\}$ и S в уравнениях (1.1), (1.1₀) разрывны, что может повлечь неразрешимость задачи Коши во множестве классических или обобщенных решений в целом, т. е. при всех $t > 0$.

§ 2. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА.

УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ И УРАВНЕНИЕ СМОЛУХОВСКОГО ТЕОРИИ КОАГУЛЯЦИИ

Эволюция физических систем, состоящих из статистически большого количества элементов, сталкивающихся в процессе движения, в некотором смысле, локально, моделируется обобщенным уравнением Больцмана (*кинетическое уравнение*)

$$\frac{\partial f^{(\omega)}(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div}_x(v^{(\omega)} f^{(\omega)}(x, t)) = S^{(\omega)}(f^{(\cdot)}(x, t)), \quad (1.3)$$

$$\omega \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_1^+, \quad x \in \mathbb{R}_n,$$

где подлежащая отысканию функция f описывает состояния физической системы в каждый момент времени $t \geq 0$ в точках с пространственными координатами $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Величины $v^{(\omega)} \in \mathbb{R}_n$ определяют скорость движения элементов физической системы между столкновениями, т. е. *скорость свободного переноса*.

Множество параметров $\Omega = \{\omega\}$ может быть конечным либо бесконечным. (Оно считается метрическим локально компактным счетно-конечным пространством. В частности, когда Ω — конечный набор индексов, то Ω снабжается дискретной метрикой.)

Уравнения (1.1), (1.1₀), (1.3) возникают при моделировании процессов в форме соотношений баланса, которые выполняются при взаимодействии элементов физической системы, скажем молекул газа,

капель в аэрозольном облаке и т. д. При этом состояния моделируемого объекта в каждый момент времени t задаются вектором f (неизвестная, подлежащая отысканию), а операторы потоков $\{F_j\}$ и операторы столкновений S в уравнениях (1.1), (1.1₀), (1.3) задаются характером рассматриваемого явления. Как правило, эти операторы нелинейные, что отражает наличие взаимодействия между элементами описываемого объекта. Указанные факторы определяют значительный уровень сложности математического исследования упомянутых задач.

Уравнение (1.3) включается в *обобщенное уравнение больцмановского типа*

$$\frac{\partial f^{(\omega)}(x, t)}{\partial t} + L(f) = S^{(\omega)}(f^{(\cdot)}(x, t)) \quad (1.4)$$

с независимыми аргументами $\omega \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}_1^+$, $x \in \mathbb{R}_n$. Аргумент ω особо выделен, так как по нему осуществляется действие оператора столкновений S на функцию f . Такая запись отражает локальность столкновений частиц. Уравнение (1.4) в общем случае относится к *полулинейным законам сохранения*. Специфика уравнений больцмановского типа определяется ниже дополнительными ограничениями на оператор S , называемый в физической кинетике *оператором столкновений*.

Линейный оператор L является производящим для полугруппы (группы) преобразований, определяющей модель *свободного переноса частиц* (т. е. без взаимных столкновений) как действие однопараметрической группы (полугруппы) линейных преобразований T_t , применяемых к функции f — спектру частиц на Ω . Такие задачи в банаховом пространстве с малыми начальными данными подробно рассматриваются в гл. 3. Обычно L — *дифференциальный оператор дивергентного вида*, т. е. его значение равно дивергенции некоторого векторного поля, но бывают ситуации, когда L — линейный интегродифференциальный оператор. Последнее характерно для марковских моделей спонтанного распада частиц [28, 245, 246] и их конденсационного роста [28], что сопутствует коагуляции капель в облаках.

Ограничения на оператор столкновений S в основном связаны со свойствами постоянства либо невозрастания нормы решения в пространстве L_1 , а также неотрицательностью решения f , которое по своему физическому содержанию характеризует распределение числа частиц в системе среди возможных состояний.

В кинетической теории газов [16, 88], моделируемой уравнением Больцмана вида (1.3), решение $f(v, x, t)$ называют *одночастичной функцией распределения*. В пространственно неоднородной модели,

описываемой уравнением (1.3), ее связывают с плотностью вероятности $p(v, x, t)$ обнаружения молекулы в момент времени t в элементе объема $dv \times dx$ фазового пространства $\mathbb{R}_6 = \mathbb{R}_3 \times \mathbb{R}_3$ (декартово произведение пространственных координат на множество скоростей) посредством соотношения [177, 178], [93, 111, 232]:

$$f(v, x, t) \sim C(m, N, V)p(v, x, t),$$

где m — масса молекулы, N — число молекул в физической системе, V — пространственный объем, занимаемый газом. Таким образом, величина f характеризует плотность вероятности обнаружения молекулы в 6-мерном фазовом пространстве, которое состоит из декартового произведения 3-мерных пространственных координат на 3-мерное пространство скоростей [179]. (В пространственно однородных задачах зависимость функции f от координат x отсутствует, и фазовое пространство состоит только из множества скоростей $v \in \mathbb{R}_3$.) Приведенная связь используется на физическом уровне строгости, когда число частиц в системе $N \gg 1$. Однако ее математическое обоснование весьма далеко от своего завершения и требует дальнейших исследований. В частности, уравнение Больцмана допускает решения, которые имеют естественную физическую интерпретацию схлопывающегося или разлетающегося газа (см. ниже решения А. А. Никольского и В. С. Галкина [126, 64]), но эти решения не обладают свойством интегрируемости по переменным $x, v \in \mathbb{R}_6$, что противоречит стандартной нормировке плотности вероятности

$$\int_{\mathbb{R}_6} p(v, x, t) dv dx = 1.$$

Величину

$$n(x, t) = N \int_{\mathbb{R}_3} p(v, x, t) dv$$

называют *концентрацией газа*, а произведение $\rho(x, t) = mn(x, t)$ — *плотностью распределения массы* газа в окрестности точки x в момент времени t .

Математическая проблема вывода кинетического уравнения Больцмана из динамики конечного числа частиц, доказательство корректности задач для него и отыскание условий связи его решений с решениями уравнений Навье—Стокса являются областью современных интенсивных исследований, восходящих к 6-й проблеме Гильберта.

Следуя монографиям [177, 178, 179], отметим наиболее существенные моменты, характеризующие физическую сторону явления столкновений молекул в газах.

Процессы столкновения атомных и молекулярных частиц можно разделить на два типа — упругие и неупругие. При упругих столкновениях сохраняется их суммарная кинетическая энергия, меняются лишь направления и скорости движения сталкивающихся частиц. При неупругих столкновениях меняется внутренняя энергия частиц.

Физическое описание столкновения молекул зависит от потенциала их парного взаимодействия, который определяется характером квантовомеханических и электромагнитных явлений, протекающих при их сближении. Наиболее простой процесс столкновений описывается моделью бильярдных шаров. В этом случае столкновение молекул рассматривается как взаимодействие бильярдных шаров диаметра d . В реальных газах диаметр молекул имеет порядок 10^{-8} см. Для модели бильярдных шаров потенциал взаимодействия может быть задан в виде

$$U(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq d, \\ 0, & r > d. \end{cases}$$

Более сложным является потенциал взаимодействия степенного вида:

$$U(r) = \frac{A}{r^{s-1}}.$$

Для реальных газов достаточно неплохим является показатель $s = 9$. При значении $s = 5$ получаем *максвелловские молекулы*, для которых проведен ряд интенсивных теоретических исследований для уравнения Больцмана, описывающего поведение одночастичной функции распределения f (см. [13, 14]).

Для описания взаимодействия молекул используется также модельный потенциал Леннарда—Джонса:

$$U(r) = B \left[\left(\frac{d_{r_0}}{r} \right)^n - \left(\frac{r_0}{r} \right)^m \right],$$

где B , r_0 , n и m — константы. Первый член в правой части этого выражения описывает столкновение молекул на близких расстояниях, второй — их притяжение.

В соответствии с [108–110] перечислим стандартные сведения о классическом рассеянии пары молекул, взаимодействующих посредством центральных сил с потенциалом $U(r)$, зависящим от расстояния между центрами их масс. Под столкновением будем понимать преобразование скоростей пары молекул из состояния

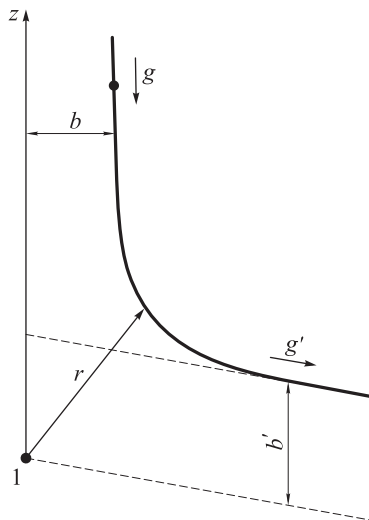


Рис. 1.1. Схема столкновения двух частиц

при $t \rightarrow -\infty$ (до столкновения) в состояние при $t \rightarrow +\infty$ (после столкновения).

Обозначим через $v, v_1 \in \mathbb{R}_3$ векторы скоростей пары молекул до столкновения, через $v', v'_1 \in \mathbb{R}_3$ — их скорости после столкновения. Пусть $g = v_1 - v_2$ вектор относительной скорости сталкивающихся частиц до столкновения, а $g' = v'_1 - v'_2$ этот же вектор после столкновения. Направив ось z вдоль вектора g из центра частицы 1, обозначим через b прицельное расстояние до столкновения — асимптотическое расстояние между траекторией частицы r и осью z . Через b' обозначим прицельное расстояние после процесса столкновения. Пусть m_1, m_2, m'_1, m'_2 — массы пары молекул до и после столкновения.

В силу закона сохранения момента количества движения, все рассматриваемые векторы скоростей принадлежат плоскости, проходящей через векторы v_1 и v_2 . При столкновении выполняются законы сохранения массы, импульса и энергии:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= m'_1 + m'_2, \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m'_1 v'_1 + m'_2 v'_2, \\ m_1 \frac{v_1^2}{2} + m_2 \frac{v_2^2}{2} &= m'_1 \frac{v'^2_1}{2} + m'_2 \frac{v'^2_2}{2}. \end{aligned}$$

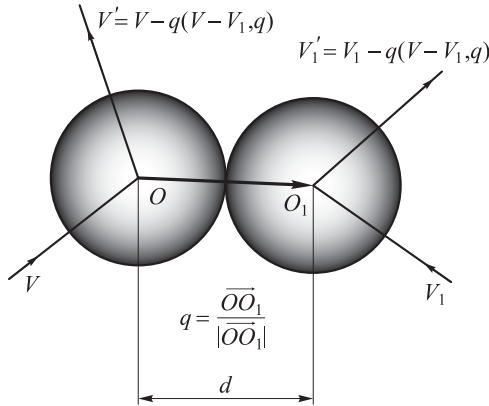


Рис. 1.2. Столкновение одинаковых бильярдных шаров

Закон столкновения пары молекул особенно просто выглядит в модели одинаковых «твердых сфер» (бильярдных шаров, имеющих одинаковые массы: $m_1 = m_2 = m'_1 = m'_2 > 0$). В этом случае преобразование столкновения имеет следующий вид:

$$v' = v - q(v - v_1, q)_{\mathbb{R}_3}, \quad v'_1 = v_1 + q(v - v_1, q)_{\mathbb{R}_3},$$

$$\forall q \in \Sigma_2 = \{q \in \mathbb{R}_3 : (q, q)_{\mathbb{R}_3} = 1\}.$$

При этом единичный вектор q направлен вдоль линии, соединяющей центры шаров $\overrightarrow{OO_1}$ в момент столкновения, см. рис. 1.2.

Якобиан приведенного преобразования скоростей и вектора q

$$v \mapsto v',$$

$$v_1 \mapsto v'_1,$$

$$q \mapsto q' = -q,$$

в случае бильярдных шаров равен единице [88]. Законам сохранения импульса, энергии и момента количества движения пары сталкивающихся частиц удовлетворяют некоторые специальные преобразования скоростей частиц, например ортогональные столкновения, рассматриваемые ниже.

Естественно, что для модели столкновений молекул — бильярдных шаров величину d называют эффективным сечением взаимодействия пары молекул. Наглядность понятия эффективного сечения столкновения как диаметра сталкивающихся шаров позволяет построить его аналоги и для других видов потенциала столкновения. Для нейтральных газов эта величина $d \sim 10^{-8}$ см.

[. . .]