# Предисловие переводчика

Теория вэйвлетов и их применения являются важным и актуальным разделом современной математической науки. По этой тематике издано достаточно много книг на русском языке, в которых отражены основные свойства вэйвлетов. Среди них можно назвать монографии И. Добеши «Десять лекций по вэйвлетам», Ч. К. Чуи «Введение в вэйвлеты», С. Малла «Вэйвлеты в обработке сигналов» и др. Приятно отметить тот факт, что по теории вэйвлетов появилось много качественных книг, написанных российскими авторами. Их неполный перечень дается в списке дополнительной литературы на русском языке. Несмотря на это, необходимость в новых книгах по вэйвлетам очевидна.

Книга М. В. Фрейзера посвящена подробному изложению теории вэйвлетов, основанному на применении алгебраических методов. Она написана очень четко и ясно и в основном ориентирована на студентов 2–4-х курсов высших учебных заведений.

В книге М. В. Фрейзера весьма удачно дается изложение методов алгебры и с этой точки зрения описываются свойства дискретного преобразования Фурье (DFT): диагонализуемость дискретным базисом Фурье операторов, инвариантных относительно сдвига, быстрая численная реализация DFT с помощью алгоритма FFT. Следует отметить четкое описание этого алгоритма, который находит широкое практическое применение.

Главное внимание в книге М. В. Фрейзера уделяется дискретному вэйвлет-преобразованию, важному с практической точки зрения. Эта тема изложена очень подробно, дается четкое алгоритмическое описание реализуемых на современных компьютерах методов дискретного вэйвлет-преобразования.

В монографии М. В. Фрейзера приводится большое количество практических примеров и задач, наглядно иллюстрирующих свойства используемых математических методов и их современную прикладную направленность. Так, книга М. В. Фрейзера начинается с примера использования вэйвлетов для компактного хранения цифровых отпечатков пальцев, которое осуществляется в ФБР.

Скажем несколько слов о терминах, используемых в русском переводе книги М. В. Фрейзера. Как правило, они носят традиционный для русской литературы характер. Это означает, что в основу положены термины работы И. Я. Новикова и С. Б. Стечкина «Основы теории всплесков» (Успехи математических наук. — 1998. — Т. 53, № 6(324). — С. 53–128). Кроме этого, широко используется терминология, введенная в русском варианте монографий Ч. К. Чуи и С. Малла.

В 80-е годы российским математиком профессором К. И. Осколковым был предложен русский аналог термина «вэйвлеты» — «всплески». Этот термин иногда используется в русскоязычной литературе. В предлагаемом переводе книги М. В. Фрейзера (так же, как и в книгах Ч. К. Чуи и С. Малла) используется термин «вэйвлеты», так как он более широко распространен и общепринят во всем мире.

Математическая теория вэйвлетов — это сложный предмет, связующий и обобщающий многие разделы современной математики. Изучение этой теории довольно сложно как для студентов и научных сотрудников, так и для инженеров. В отличие от ранее изданных книг по теории вэйвлетов монография М. В. Фрейзера более доступна и проста.

Несомненно, что книга М. В. Фрейзера полезна широкому кругу российских читателей и будет пользоваться большим спросом.

Профессор *Я. М. Жилейкин*

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

# Предисловие

Студенты Мичиганского государственного университета, специализирующиеся по математике, прослушивают «завершающий» курс («Capstone») в конце их трехгодичного обучения. Содержание каждого курса меняется в зависимости от необходимости. Его цель — собрать вместе различные темы из списка предметов учебного плана младших курсов и подготовить студентов к изучению наиболее развивающихся областей математики. Предлагаемая книга была написана именно для «завершающего» курса.

Основы вэйвлет-теории — это естественная тема для такого курса. Появление вэйвлетов (именно под таким названием) датируется 1980-ми годами. Занимающая место между математикой и инженерией, вэйвлет-теория наглядно показывает студентам, что математические исследования с успехом применяются в важных практических областях, таких как сжатие изображения и численное решение дифференциальных уравнений. Автор книги верит, что наиболее существенные элементы теории вэйвлетов достаточно элементарны для того, чтобы их с успехом преподавать наиболее сильным студентам младших курсов.

Книга предназначена для студентов первых лет обучения, поэтому предполагается только знание основ линейной алгебры и математического анализа. Мы не требуем хорошей осведомленности о комплексных числах и корнях из единицы. Эти материалы даются читателю в первых двух параграфах гл. 1. В конце гл. 1 мы приводим обзор по линейной алгебре. Студенты должны хорошо разбираться в основных определениях разд. 1.3 и разд. 1.4. С нашей точки зрения, линейные преобразования имеют первостепенное значение для изучения; матрицы возникают как реализация линейных преобразований. Многие студенты могут быть знакомы с результатами по замене базисов в разд. 1.4, но имеют возможность воспользоваться и повторить эти вопросы снова. В разд. 1.5 мы ставим вопрос о том, как выбрать базис, чтобы по возможности упростить матричное представление заданного линейного преобразования. Мы сосредоточиваем внимание на простейшем случае, когда линейное преобразование диагонализуемо. В разд. 1.6 мы подробно рассматриваем скалярные произведения и ортонормированные базисы. Мы заканчиваем эту главу формулировкой спектральной теоремы для матриц, доказательство которой в общих чертах выносится в упражнения. Это доказательство выходит за границы знаний большинства студентов младших курсов.

Глава 1 носит характер справочного материала. В зависимости от основных знаний многие читатели и преподаватели могут перескочить или быстро просмотреть многое из этого материала. Изложение в гл. 1 достаточно полное для того, чтобы текст был по возможности самодостаточным, оно обеспечивает логически упорядоченное толкование предметного материала и стимулирует его дальнейшее развитие.

Автор уверен, что студенты могут приступить к изучению анализа Фурье в его конечномерном контексте, где все можно объяснить в терминах линейной алгебры. При таком подходе ключевую идею можно изложить, не отвлекаясь на технические моменты, связанные со сходимостью. Мы начинаем с введения дискретного преобразования Фурье (DFT) в разд. 2.1. DFT вектора состоит из его компонент относительно некоторого ортогонального базиса комплексных экспонент. Ключевой момент состоит в том, что все линейные преобразования, инвариантные относительно сдвига, диагонализуются таким базисом; это доказывается в разд. 2.2. Мы обращаемся к вычислительным проблемам в разд. 2.3, в котором мы видим, что DFT может быть быстро вычислено с помощью быстрого преобразования Фурье (FFT).

Не так хорошо известно, что основы теории вэйвлетов могут быть введены с точки зрения конечномерных пространств. Это делается в гл. 3. Материал этой главы не является полностью стандартным, это — адаптация вэйвлет-теории к конечномерным данным. Она обладает тем преимуществом, что в качестве основы требует только знания линейной алгебры.

В разд. 3.1. мы исследуем ортонормированные базисы с пространственной и частотной локализациями; разложения по этим базисам могут быть быстро вычислены. Мы приходим к рассмотрению четных сдвигов двух векторов, в некотором смысле материнского и отцовского вэйвлетов. Здесь естественным образом возникает методика набора фильтров для вычисления вэйвлетов. Путем итерации этой структуры набора фильтров в разд. 3.2 мы приходим к многоуровневому вэйвлет-базису. Примеры и приложения обсуждаются в разд. 3.3. В этом же контексте представлены вэйвлеты Добеши и рассмотрены элементарные примеры сжатия информации. Студент, знакомый с системами MATLAB, Maple или Mathematica, при желании сможет решить аналогичные задачи.

В разд. 4.1 мы переходим к бесконечномерным, но дискретным пространствам $\ell^2(\mathbb{Z})$, состоящим из суммируемых с квадратом последовательностей, заданных в целых точках. Главные свойства полных ортонормированных множеств в пространствах со скалярным произведением обсуждаются в разд. 4.2. Здесь математический анализ впервые серьезным образом возникает на нашей картине. Интегрируемые с квадратом функции на промежутке $[-\pi, \pi)$ и их ряды Фурье подробно рассматриваются в разд. 4.3. Здесь мы совершаем небольшой обман: мы говорим, что используем интеграл Лебега, но не определяем его, и просим студентов принять на веру некоторые его свойства. Мы снова приходим к главному принципу, что система Фурье диагонализует линейные операторы, инвариантные относительно сдвига. Подходящая версия преобразования Фурье на этом множестве есть отображение последовательности в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z})$ на функцию в $L^2([-\pi, \pi))$, коэффициенты Фурье которой составляют исходную последовательность. Его свойства представлены в разд. 4.4. После этих приготовлений построение вэйвлетов первого этапа на целочисленных множествах (разд. 4.5)и итерационный шаг, приводящий к многоуровневому базису (разд. 4.6), получаются как полная аналогия методов в гл. 3. Вычисление вэйвлетов в контексте $\ell^2(\mathbb{Z})$ обсуждается в разд. 4.7, который включает в себя построение вэйвлетов Добеши на множестве $\mathbb{Z}$. Порождающие векторы $u$ и $v$ вэйвлет-системы в $\ell^2(\mathbb{Z})$ снова появляются в гл. 5 как масштабная последовательность и ее компаньон.

Обычный вариант вэйвлет-теории на вещественной прямой представлен в гл. 5. Предварительные замечания, касающиеся функций, интегрируемых с квадратом, и преобразования Фурье обсуждаются в разд. 5.1 и разд. 5.2. Факты, касающиеся обратного преобразования Фурье в $L^2(\mathbb{R})$, доказываются в деталях, хотя многие преподаватели предпочитают считать эти результаты известными. Формула обратного преобразования Фурье аналогична представлению функции с помощью ортонормированного базиса, где вместо суммы используется интеграл. Мы видим также, что система Фурье диагонализует операторы, инвариантные относительно сдвига. В разд. 5.3 доказана теорема Малла о том, что кратномасштабный анализ дает вэйвлет-базис. Рассмотренное выше соотношение между масштабной последовательностью и вэйвлетами в $\ell^2(\mathbb{Z})$ приводит нас к прямому использованию результатов гл. 4. Условия, при которых вэйвлеты в $\ell^2(\mathbb{Z})$ могут быть использованы для генерации кратномасштабного анализа и, следовательно, вэйвлетов на множестве $\mathbb{R}$, рассматриваются в разд. 5.4. В разд. 5.5 мы строим вэйвлеты Добеши с компактным носителем и показываем, как выполняется вэйвлет-преобразование с использованием набора фильтров.

В гл. 6 мы кратко описываем применение полученных результатов к численному решению дифференциальных уравнений. Раздел 6.1 начинается с обсуждения вопроса о числе обусловленности матрицы. В разд. 6.2 мы представляем простой пример численного решения обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами на отрезке $[0, 1]$ с использованием метода конечных разностей. Мы видим, что, хотя результирующая матрица является разреженной, что удобно, она имеет число обусловленности, которое возрастает квадратично с размером матрицы. Для сравнения, в разд. 6.3 мы видим, что в методе вэйвлет-Галеркина дискретизации равномерно эллиптического дифференциального уравнения с переменными коэффициентами матрица полученной линейной системы может быть переобусловлена так, что будет обязательно разреженной и будет иметь ограниченное число обусловленности. Ограниченность числа обусловленности вытекает из свойства эквивалентности нормы вэйвлетов, которое мы приводим без доказательства. Разреженность полученной матрицы происходит от локализации вэйвлет-системы. В значительной степени ортогональность элементов вэйвлет-базиса является следствием непересечения их носителей (конечно, при использовании вэйвлетов с компактным носителем). Это гораздо более сильное свойство, например, в случае умножения на функцию с переменными коэффициентами, чем тонкое взаимное уничтожение, лежащее в основе ортогональности системы Фурье. Поэтому, хотя вэйвлет-система может и не диагонализовать точно ни один часто встречающийся оператор, она почти диагонализует (в смысле разреженных матриц) гораздо более широкий класс операторов, чем базис Фурье.

Основы теории вэйвлетов включают разделы линейной алгебры, вещественный и комплексный анализ, численный анализ и инженерию. В этом отношении она повторяет свойства современной математики, которая становится все более междисциплинарной.

С самого начала эта книга относительно элементарна, но уровень сложности неуклонно возрастает. Ее можно использовать по-разному, в зависимости от уровня подготовки студентов. Если гл. 1 требует для изучения длительного времени, то наиболее сложные доказательства в следующих главах могут быть только коротко очерчены.

Для более сильных студентов можно перескочить многие или даже все разделы гл. 1, что оставит время для более основательного рассмотрения оставшегося материала.

Краткий курс для более квалифицированной аудитории можно начать с гл. 4, так как основной материал в гл. 4 и 5 носит технический, а не концептуальный характер, независимый от содержания гл. 2 и 3.

Человек с солидным знанием анализа Фурье должен изучать основы теории вэйвлетов, данные в разд. 4.5, 4.7, 5.3, 5.4, 5.5 и 6.3, только временами обращаясь к оставшемуся тексту.

Эта книга предназначена быть по возможности элементарным введением в вэйвлет-теорию. Она не планировалась как основательный обзор. Мы отсылаем читателя, заинтересованного в дополнительной информации, к библиографии в конце книги.

*М. Фрейзер*

Мичиганский государственный университет
Апрель 1999 г.

# Выражение признательности

В создании этой книги принимали участие большое число моих коллег и студентов. Результаты о дискретном вэйвлет-разложении, представленные в гл. 3 и 4, были получены в совместной работе (Фрэйзер и Кумар, 1993 г.) с Аруном Кумаром при нашей ранней попытке понять вэйвлеты. В дальнейшем это было развито в общей работе, выполненной с Джеем Эпперсоном и Даниелем Вагнером, нашими коллегами из Калифорнии. Многие графики в этой книге аналогичны примерам, выполненным Дугласом МакКаллохом в течение этого консультационного проекта. Некоторые дополнения, раскрывающие суть задачи, были получены в последующей работе с Рудольфо Торресом.

Мои коллеги из Мичиганского государственного университета оказали разнообразное содействие при создании этой книги. Патти Лэмм прочла весь предварительный вариант книги и сделала более сотни полезных замечаний, некоторые из них привели к полной переработке § 6.2. Она также обеспечила книгу компьютерными рисунками для пролога. Шелдон Акслер осуществил техническое редактирование книги и сделал ряд замечаний, которые улучшили стиль и оформление всей рукописи. Т. И. Ли сделал ряд ценных замечаний, включающих в себя предоставление упр. 1.6.20. Байрон Дрехман оказал помощь при составлении указателя.

Я воспользовался благоприятной возможностью опробовать предварительные варианты этой книги в студенческих аудиториях. Они использовались в Мичиганском государственном университете в весеннем курсе 1996 г. для студентов младших курсов и в вводном курсе для студентов старших курсов летом 1996 г. Администрация математического факультета, в первую очередь Джон Холл, Билл След и Вей Эй Куан, сделали все, чтобы обеспечить прочтение этих курсов. Студенты, посещавшие лекции, сделали много замечаний и поправок, которые улучшили текст рукописи. Гихан Мандур, Йан Ю Лин, Рудольф Блажен и Рихард Андрусяк внесли большое количество исправлений.

Эта книга была также основой для трех коротких курсов по вэйвлетам. Один из них был прочитан в университете Пуэрто-Рико в Майагуезе весной 1997 г. Я благодарю Найду Сантьяго за помощь в организации визита Шоуна Ханта, Доминго Родригеса и Рамона Васкеса за приглашение и теплое гостеприимство. Другой короткий курс был прочитан в университете штата Миссури г. Колумбия осенью 1997 г. Я благодарю Елиаса Сааба и Накхле Асмара, сделавших это возможным. Третий короткий курс состоялся в институте математики UNAM в г. Куернавака, Мексика, весной 1998 г. Я благодарю профессоров Сальвадора Перез-Естеву и Карлоса Виллегас Бласу за их усилия при организации этой поездки и за их всестороннее участие. Книга в первоначальном виде была также использована в лекциях Кристиной Перейра в университете Нью-Мексико и Сюзанной Турвилль в Карнеги-Меллон университете. Кристина, Сюзанна и их студенты выполнили ценную работу и внесли большое количество исправлений, как это сделал Киис Онневиар.

Мои дипломники Кунчан Вонг и Майк Никсон сделали много полезных замечаний и внесли в рукопись некоторое число исправлений. Мой другой дипломник, Шанхьян Зонг, обучил меня математике (см. § 6.3.1). Я также благодарю его и его сына, Симона Зонга, за рис. 35.

Примеры отпечатков пальцев на рис. 1–3 в прологе были предоставлены Крисом Брислоуном из Лос-Аламосской национальной лаборатории. Я благодарен ему за разрешение воспроизвести эти изображения.

Рисунки 36, *д* и *е* были подготовлены с использованием программы (Summus 4U2C 3.0), предоставленной мне Бьёрном Яавертом и Summus Technologies, Inc., которых я благодарю.

Рисунки 36, *б*, *в* и *г* были получены с использованием коммерчески доступного программного матобеспечения Win JPEG v.2.84.

Рукопись и некоторые рисунки были подготовлены с помощью издательской системы LaTeX. Другая часть рисунков получена с использованием пакета MATLAB. Стив Племмонс, руководитель компьютерной группы математического факультета Мичиганского государственного университета, оказал разнообразную помощь, в частности касающуюся изображений на рис. 36. Я благодарю Ину Линдеман, моего издателя в Шпрингер-Ферлаг, за ее участие, ободрение и особенно за ее терпение.

Я пользуюсь удобным случаем поблагодарить математиков, критическая помощь которых способствовала тому, что я смог написать эту книгу. Терпение и поддержка моего научного консультанта Джона Гарнета с самого начала играли главную роль. Мое раннее сотрудничество с Бьёрном Яавертом сыграло решающую роль в моей карьере.

Руководитель моей докторской диссертации Гвидо Вайсс подбадривал и помогал мне в течение многих лет во всех важных случаях.

Эта книга была пересмотрена и исправлена во время отпуска, предоставленного мне Мичиганским государственным университетом. Этот отпуск я провел в университете штата Миссури в г. Колумбия. Я благодарю университет штата Миссури за их гостеприимство, предоставленные мне необходимые возможности и техническое содействие. В то время как академическая система испытывает многочисленные атаки, стоит отметить, что эта книга, а также много других книг не были бы написаны без поддержки этой системы.

# Пролог: сжатие файлов базы данных ФБР

Когда ваша местная полиция арестовывает кого-либо по незначительному обвинению, она всегда хочет проверить, предъявлялся ли этому лицу ордер на арест, возможно, в другом штате, за более серьезное преступление. Для проверки можно послать отпечатки пальцев этого человека в архив отпечатков пальцев ФБР в Вашингтон Д. К. К несчастью, ФБР не может сравнить полученные отпечатки пальцев с имеющимися записями достаточно быстро, чтобы их идентифицировать до того, как подозреваемый должен быть отпущен. Преступник, обвиняемый в серьезном преступлении, постарается быстро скрыться, пока ФБР осуществит нужную идентификацию.

Почему это занимает так много времени? Файлы ФБР с отпечатками пальцев хранятся на карточках отпечатков пальцев в кабинетах файлов в складском помещении, которое занимает площадь около одного акра. Материально-техническое выполнение процедуры поиска делает невозможным ее быструю реализацию.

Решение этой задачи кажется очевидным — отпечатки пальцев базы ФБР должны быть компьютеризированы, и поиск должен быть осуществлен электронным образом. В конце концов, мы живем в компьютерный век. Почему это не было давно сделано? Данные, представляющие изображение отпечатков пальцев, могут храниться на компьютере таким образом, что изображение может быть восстановлено с точностью, достаточной для получения полной идентификации. Для этого изображение отпечатков пальцев сканируется и оцифровывается. Каждый квадратный дюйм изображения отпечатка пальцев разбивается на решетку из $500 \times 500$ маленьких квадратов, называемых *пикселями*. Каждый пиксель задается значением шкалы яркости, соответствующим его потемнению, с масштабом от 0 до 255. Так как целые числа от 0 до 255 могут быть представлены в двоичной системе с использованием 8 знаков (т. е. каждое целое от 0 до 255 соответствует 8-значной последовательности нулей и единиц), то они занимают 8 двоичных бит данных для определения потемнения одного пикселя. (Одна двоичная цифра представляет один бит данных, который электронно соответствует пе-

**Рис. 1.** Оригинальное изображение отпечатков пальцев (любезно предоставленное Крисом Брислоуном, Лос-Аламосская национальная лаборатория)

реключателю в положении «включен» или «выключен».) Пример отпечатков пальцев, отсканированных таким образом, показан на рис. 1.

Рассмотрим объем данных, требуемых для одной карточки отпечатков пальцев. Каждый отпечаток занимает площадь около 1.5 дюйма $\times$ $\times$ 1.6 дюйма, с $500^2 = 250\,000$ пикселей на квадратный дюйм, каждый требующий 8 бит данных (один *байт* данных). Поэтому каждый отпечаток пальцев требует около 600 000 байт данных. Карточка включает все 10 отпечатков пальцев, плюс 2 отпечатка больших пальцев и 2 отпечатка всех пальцев на руке (всей пятерни). Результат таков, что каждая карточка требует около 10 мегабайт данных (мегабайт — это примерно один миллион байтов). Такое число еще доступно для современных компьютеров, которые часто имеют несколько гигабайт памяти (гигабайт — это примерно один миллиард, или $10^9$, байт). Электронная передача

[. . .]

Глава 1

# Основные понятия: комплексные числа и линейная алгебра

## 1.1. Вещественные и комплексные числа

Для начала введем некоторые обозначения. Множество натуральных чисел $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ будет обозначаться буквой $\mathbb{N}$, а множество целых чисел $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ — буквой $\mathbb{Z}$. Комплексные числа введем несколько позже. Мы предполагаем также знакомство с множеством вещественных чисел и их свойствами, которые коротко приводим ниже. Основные алгебраические свойства множества $\mathbb{R}$ следуют из того, что $\mathbb{R}$ — поле.

**Определение 1.1.** *Полем* $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ называется множество $\mathbb{F}$ с двумя операциями: $+$ (называемой *сложением*) и $\cdot$ (называемой *умножением*) обладающими следующими свойствами:

С1 (замкнутость относительно сложения). Для всех $x, y \in \mathbb{F}$ определена сумма $x + y$, которая является элементом множества $\mathbb{F}$.

С2 (коммутативность сложения). $x + y = y + x$ для всех $x, y \in \mathbb{F}$.

С3 (ассоциативность сложения). $x + (y + z) = (x + y) + z$ для всех $x, y, z \in \mathbb{F}$.

С4 (существование нулевого элемента). Существует элемент поля $\mathbb{F}$, обозначаемый 0, такой, что $x + 0 = x$ для всех $x \in \mathbb{F}$.

С5 (существование элемента, обратного по сложению). Для каждого $x \in \mathbb{F}$ существует элемент поля $\mathbb{F}$, обозначаемый через $-x$, такой, что $x + (-x) = 0$.

У1 (замкнутость относительно умножения). Для всех $x, y \in \mathbb{F}$ определено произведение $x \cdot y$, которое является элементом множества $\mathbb{F}$.

У2 (коммутативность умножения). $x \cdot y = y \cdot x$ для всех $x, y \in \mathbb{F}$.

У3 (ассоциативность умножения). $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ для всех $x, y, z \in \mathbb{F}$.

У4 (существование единицы). Существует элемент поля $\mathbb{F}$, обозначаемый 1, такой, что $1 \neq 0$ и $x \cdot 1 = x$ для всех $x \in \mathbb{F}$.

У5 (существование элемента, обратного по умножению). Для каждого $x \in \mathbb{F}$ такого, что $x \neq 0$, существует элемент множества $\mathbb{F}$, обозначаемый через $x^{-1}$ (или $1/x$), такой, что $x \cdot (x^{-1}) = 1$.

Д (закон дистрибутивности). $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ для всех $x, y, z \in \mathbb{F}$.

Мы подчеркиваем, что, в принципе, операции $+$ и $\cdot$ в определении 1.1 могут быть любыми операциями, обладающими требуемыми свойствами. Однако в случае пространств $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ это обычные операции сложения и умножения. В частности, при обычном понимании знаков $+$ и $\cdot$ множество $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ образует поле. При этом мы опускаем знак $\cdot$ и пишем $xy$ вместо $x \cdot y$. Все основные алгебраические свойства множества $\mathbb{R}$ (такие как $-(-x) = x$) следуют из свойств поля. Они приводятся во многих вводных курсах анализа. В этой книге мы предполагаем все эти свойства известными.

*Упорядоченное поле* есть поле $\mathbb{F}$ с отношением $<$, обладающим свойствами O1–O4. Первые два свойства устанавливают, что $\mathbb{F}$ есть упорядоченное множество.

O1 (*принцип сравнения*). Если $x, y \in \mathbb{F}$, то выполняется одно и только одно из следующих соотношений:

$$x < y, \quad y < x, \quad y = x.$$

O2 (*транзитивность*). Если $x, y, z \in \mathbb{F}$, где $x < y$ и $y < z$, то $x < z$.

Оставшиеся два свойства устанавливают тот факт, что операции $+$ и $\cdot$, определенные в $\mathbb{F}$, не противоречат отношению порядка $<$:

O3 (*непротиворечивость* $+$ *с* $<$). Если $x, y, z \in \mathbb{F}$ и $y < z$, то $x + y < x + z$.

O4 (*непротиворечивость* $\cdot$ *с* $<$). Если $x, y \in \mathbb{F}$, где $0 < x$ и $0 < y$, то $0 < xy$.

Мы принимаем факт, что множество $\mathbb{R}$ с обычным отношением $<$ образует упорядоченное поле. Все стандартные свойства порядка в $\mathbb{R}$ (если $0 < x$, то $-x < 0$) следуют из свойств O1–O4. Эти свойства понадобятся нам в дальнейшем. Мы используем стандартное обозначение $x > y$ в том же смысле, что и $y < x$. Запись $x \leqslant y$ (эквивалентная $y \geqslant x$) означает, что или $x < y$, или $x = y$.

Для $x \in \mathbb{R}$ обозначим через $|x|$ абсолютное значение, или модуль, $x$, где $|x| = x$, если $x \geqslant 0$, и $|x| = -x$, если $x < 0$. Поэтому $|x| \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$, и $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

**Лемма 1.2 (неравенство треугольника в $\mathbb{R}$).** *Если $x, y \in \mathbb{R}$, то*

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Доказательство. Упражнение 1.1.1. ■

Модуль $|x - y|$ можно интерпретировать как расстояние между точками $x$ и $y$ в $\mathbb{R}$. (См. упр. 1.1.2.) Это приводит к понятию сходимости последовательности.

**Определение 1.3.** Пусть $M \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$. Последовательность вещественных чисел $\{x_n\}_{n=M}^{\infty}$ *сходится к* $x$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, такое, что $|x_n - x| < \varepsilon$ при всех $n > N$. Последовательность $\{x_n\}_{n=M}^{\infty}$ *сходится*, если она сходится к некоторому пределу $x \in \mathbb{R}$.

**Определение 1.4.** Последовательность $\{x_n\}_{n=M}^{\infty}$ вещественных чисел есть *последовательность Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $|x_n - x_m| < \varepsilon$ при всех $n, m > N$.

Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел является упорядоченным полем. Свойство, которым отличается от него множество $\mathbb{R}$, есть его полнота. Во многих книгах это формулируется как свойство наличия (точной) верхней грани, а именно что каждое непустое, ограниченное сверху множество вещественных чисел имеет верхнюю грань. Свойство наличия верхней грани приводит к следующему результату.

**Теорема 1.5 (признак Коши сходимости последовательности).** *Любая последовательность Коши вещественных чисел сходится.*

Признак Коши позволяет нам доказать, что последовательность сходится, даже если мы не знаем значения предела. Это особенно полезно, когда мы рассматриваем ряды. Обратное утверждение (т. е. что любая сходящаяся последовательность есть последовательность Коши) также справедливо (упр. 1.1.3).

Мы видели, что множество $\mathbb{R}$ (с обычным сложением и умножением) образует полное упорядоченное поле. Это характеризует $\mathbb{R}$: любое другое полное упорядоченное поле, по существу, есть то же самое $\mathbb{R}$, за исключением выбора названий и обозначений, даваемых элементам и операциям (более точно, любое другое полное упорядоченное поле «изоморфно» $\mathbb{R}$). Мы не будем это доказывать.

В нашей книге мы будем в основном работать с множеством $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Комплексные числа также образуют полное поле (но не упорядоченное; см. упр. 1.1.4). Один (несколько мистический) способ определения множества $\mathbb{C}$ состоит в предположении существования некоторого обобщенного числа $i$ (не вещественного), которое удовлетворяет равенству $i^2 = -1$. Тогда $\mathbb{C}$ определяется как множество всех чисел вида $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$. В этом случае мы вводим в $\mathbb{C}$ обычные операции сложения и умножения: для $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{1.1}$$

и

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1), \tag{1.2}$$

которые мы получаем, если формально перемножаем элементы и используем соотношение $i^2 = -1$. (Уточним, что мы определили операции

[. . .]

действительно обратно по умножению к числу $x + iy$ (в предположении $x + iy \neq 0$). Тем самым определено $z^{-1}$ для ненулевых $z \in \mathbb{C}$, и мы полагаем

$$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1} \quad \text{для} \quad z, w \in \mathbb{C}, \quad \text{где} \quad w \neq 0.$$

**Лемма 1.9.** *Пусть $z, w \in \mathbb{C}$, где $w \neq 0$. Тогда*

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

*и*

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}\,.$$

Доказательство. Упражнение 1.1.9. ■

Определения, связанные со сходимостью последовательностей комплексных чисел, формально те же, что и в определениях 1.3 и 1.4.

**Определение 1.10.** Пусть $M \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}$. Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}_{n=M}^{\infty}$ *сходится к числу* $z$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, такое, что $|z_n - z| < \varepsilon$ при всех $n > N$. Мы говорим, что последовательность $\{z_n\}_{n=M}^{\infty}$ *сходится*, если она сходится к некоторому числу $z \in \mathbb{C}$.

Для указания того, что последовательность $\{z_n\}_{n=M}^{\infty}$ сходится к числу $z$, используются обозначения $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z$ и $z_n \to z$.

**Определение 1.11.** Последовательность $\{z_n\}_{n=M}^{\infty}$ комплексных чисел есть *последовательность Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, такое, что $|z_n - z_m| < \varepsilon$ при всех $n, m > N$.

Это приводит к критерию Коши для сходимости последовательности комплексных чисел.

**Теорема 1.12 (полнота множества $\mathbb{C}$).** *Последовательность комплексных чисел сходится тогда и только тогда, когда она является последовательностью Коши.*

Доказательство. Упражнение 1.1.10. ■

Последовательность $\{x_n\}_{n=M}^{\infty}$ вещественных чисел можно рассматривать как последовательность комплексных чисел. Однако легко видеть, что последовательность сходится в вещественном смысле тогда и только тогда, когда она сходится в комплексном смысле к тому же самому пределу (сравните с упр. 1.1.10). Следовательно, в используемых определениях нет неясностей, и мы пишем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ без уточнения поля, в котором сходимость имеет место.

## Упражнения

1.1.1. Доказать лемму 1.2.

1.1.2. Пусть $\mathbb{X}$ — произвольное множество. *Метрика, или функция расстояния* на $\mathbb{X}$, есть отображение $d\colon \mathbb{X}\times\mathbb{X} \to \{t \in \mathbb{R}\colon t \geqslant 0\}$, удовлетворяющее следующим свойствам:

M1 (*симметричность*): $d(x, y) = d(y, x)$ для всех $x, y \in \mathbb{X}$;
M2 (*невырожденность*): $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
M3 (*метрическое неравенство треугольника*): $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ для всех $x, y, z \in \mathbb{X}$.

*Метрическое пространство* $(\mathbb{X}, d)$ — множество $\mathbb{X}$ с метрикой $d$. Для $x, y \in \mathbb{R}$ положим $d(x, y) = |x-y|$. Доказать, что $d$ — метрика на $\mathbb{R}$.

1.1.3. Доказать, что сходящаяся последовательность $\{x_n\}_{n=M}^{\infty}$ вещественных чисел является последовательность Коши.

1.1.4. Пусть $\mathbb{F}$ с отношением $<$ есть упорядоченное поле.

1) Предположим, что $x \in \mathbb{F}$ и $x \neq 0$. Доказать, что $x^2 > 0$.
2) Доказать, что не существует отношения порядка $<$ на поле $\mathbb{C}$, которое делает $\mathbb{C}$ упорядоченным полем. Подсказка: предположить противное, т. е. что $<$ — такое отношение порядка. Используя (1), доказать, что $0 < -1$. Показать, что это противоречит свойствам упорядоченности, при этом $<$ вовсе не обязательно обычное упорядочивание, как при сужении на $\mathbb{R}$.

1.1.5. Доказать лемму 1.7.

1.1.6. Доказать лемму 1.8. Подсказка: не используйте прямую запись в терминах вещественной и мнимой частей. Вместо этого докажите, что

$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\bar{z}w) + |w|^2$$

и примените лемму 1.7.

1.1.7. Для $z, w \in \mathbb{C}$ определим $d(z, w) = |z - w|$. Доказать, что $(\mathbb{C}, d)$ есть метрическое пространство (см. упр. 1.1.2 с определением). Изобразить рисунок в комплексной плоскости и показать, почему условие M3 в упр. 1.1.2 называется неравенством треугольника.

1.1.8. Убедиться, что множество $\mathbb{C}$ с операциями (1.1) и (1.2) есть поле, проверяя выполнение свойств С1–С5, У1–У5 и Д.

1.1.9. Доказать лемму 1.9.