Н. Алон
Дж. Спенсер

Вероятностный метод

МАТЕМАТИКА

БИНОМ
Лаборатория знаний

Вероятностный метод

Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization

The Probabilistic Method

Second Edition

Noga Alon

Joel H. Spencer

A Wiley-Interscience Publication

JOHN WILEY & SONS, Inc.

New York Chichester Weinheim Brisbane Singapore Toronto

Н. Алон, Дж. Спенсер

Вероятностный метод

Перевод 2-го английского издания
под редакцией **А. А. Сапоженко**

Допущено
учебно-методическим советом
по прикладной математике и информатике УМО
по классическому университетскому образованию
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся
по специальности и направлению
«Прикладная математика и информатика»
и по направлению «Информационные технологии»

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2007

УДК 519.1
ББК 22.176
А45

Алон Н.

А45 Вероятностный метод : учебное пособие / Н. Алон, Дж. Спенсер; Пер. 2-го англ. изд. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. — 320 с. : ил.

ISBN 978-5-94774-556-6 (русск.)
ISBN 0-471-37046-0 (англ.)

Одна из самых известных зарубежных книг в области применения вероятностных методов в комбинаторике. В книге содержатся основные элементы методологии. Строгие обоснования и доказательства сопровождаются ясными и неформальными обсуждениями задач, методов и их приложений. Каждый метод иллюстрируется целым рядом точно подобранных примеров.

Для специалистов в области дискретной математики и теории случайных графов, студентов, аспирантов и преподавателей соответствующих дисциплин.

УДК 519.1
ББК 22.176

Издано при поддержке образовательной программы «Формирование системы инновационного образования в МГУ»

Предыдущий тираж книги выпущен при финансовой поддержке РФФИ в рамках издательского проекта № 05-01-14048

Учебное издание

Алон Нога
Спенсер Джоэл

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ МЕТОД
Учебное пособие

Ведущий редактор *М. С. Стригунова*
Художник *Н. В. Зотова*
Художественный редактор *О. Г. Лапко*
Компьютерная верстка *О. Г. Лапко*

Подписано в печать 05.03.07. Формат 70×100/16.
Гарнитура Computer Modern. Печать офсетная. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 26,0. Тираж 1100 экз. Заказ

БИНОМ. Лаборатория знаний
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (495) 157-5272,
e-mail: Lbz@aha.ru, http://www.Lbz.ru

Отпечатано в полиграфической фирме «Полиграфист»
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3

ISBN 978-5-94774-556-6 (русск.)
ISBN 0-471-37046-0 (англ.)

Оглавление

Предисловие редактора перевода 9
Предисловие авторов к русскому изданию 11
Предисловие 13
Благодарности 15

Часть I МЕТОДЫ

Глава 1. **Основы** 18
1.1. Вероятностный метод 18
1.2. Теория графов 20
1.3. Комбинаторика 24
1.4. Комбинаторная теория чисел 27
1.5. Пары с пустым пересечением 28
1.6. Упражнения 29
Вероятностный взгляд: *Теорема Эрдёша—Ко—Радо* 31

Глава 2. **Линейность математического ожидания** 32
2.1. Основы 32
2.2. Разбиение графов 33
2.3. Два быстрых результата 35
2.4. Балансировка векторов 36
2.5. Разбалансировка лампочек 38
2.6. Без подбрасывания монет 39
2.7. Упражнения 40
Вероятностный взгляд: *Теорема Брегмана* 42

Глава 3. **Малые вариации** 44
3.1. Числа Рамсея 44
3.2. Независимые множества 46
3.3. Комбинаторная геометрия 47
3.4. Упаковка 48
3.5. Перекраска 49
3.6. Непрерывное время 53
3.7. Упражнения 58
Вероятностный взгляд: *Большой обхват и большое хроматическое число* 59

Глава 4. **Второй момент** 60
4.1. Основы 60
4.2. Теория чисел 61

4.3. Дополнительные теоретические сведения 64
4.4. Случайные графы 66
4.5. Максимальный размер клики 70
4.6. Различные суммы 71
4.7. Подход Рёдля 73
4.8. Упражнения 78
Вероятностный взгляд: *Гамильтоновы пути* 80

Глава 5. **Локальная лемма** 83
5.1. Лемма 83
5.2. Свойство B и разноцветные множества действительных чисел 86
5.3. Нижние оценки для чисел Рамсея 87
5.4. Геометрический результат 89
5.5. Линейная древесность графов 90
5.6. Латинские трансверсали 95
5.7. Алгоритмический аспект 96
5.8. Упражнения 100
Вероятностный взгляд: *Ориентированные циклы* 101

Глава 6. **Корреляционные неравенства** 102
6.1. Теорема о четырех функциях Альсведе и Дайкина 103
6.2. FKG-неравенство 106
6.3. Монотонные свойства 107
6.4. Линейные расширения частично упорядоченных множеств 109
6.5. Упражнения 112
Вероятностный взгляд: *Теорема Турана* 113

Глава 7. **Мартингалы и плотная концентрация** 115
7.1. Определения 115
7.2. Большие уклонения 117
7.3. Хроматическое число 118
7.4. Два обобщения 121
7.5. Четыре примера 125
7.6. Неравенство Талаграна 127
7.7. Приложения неравенства Талаграна 130
7.8. Полиномиальная концентрация Кима—Ву 133
7.9. Упражнения 135
Вероятностный взгляд: *Теорема Вейерштрасса о приближении* 136

Глава 8. **Парадигма Пуассона** 137
8.1. Неравенства Янсона 137
8.2. Доказательства 139
8.3. Решето Бруна 142
8.4. Большие уклонения 145
8.5. Оценка числа расширений 146
8.6. Число представлений 148
8.7. Дальнейшие обобщения 151

8.8. Упражнения 153
Вероятностный взгляд: *Локальная раскраска* 154

Глава 9. **Псевдослучайность** 156
9.1. Турниры квадратичных вычетов 157
9.2. Собственные значения и расширители 160
9.3. Квазислучайные графы 167
9.4. Упражнения 173
Вероятностный взгляд: *Случайные блуждания* 174

Часть II Приложения

Глава 10. **Случайные графы** 178
10.1. Подграфы 179
10.2. Размер максимальной клики 181
10.3. Хроматическое число 183
10.4. Ветвящиеся процессы 184
10.5. Гигантская компонента 188
10.6. Фазовый переход изнутри 192
10.7. Законы «нуля или единицы» 195
10.8. Упражнения 204
Вероятностный взгляд: *Число подграфов* 205

Глава 11. **Сложность схем** 207
11.1. Предварительные замечания 207
11.2. Случайные ограничения и схемы ограниченной глубины 209
11.3. Еще о схемах ограниченной глубины 213
11.4. Монотонные схемы 216
11.5. Формулы 219
11.6. Упражнения 221
Вероятностный взгляд: *Максимальные антицепи* 222

Глава 12. **Разброс** 223
12.1. Основы 223
12.2. Достаточность шести стандартных отклонений 224
12.3. Линейный и наследственный разброс 228
12.4. Нижние оценки 231
12.5. Теорема Бека—Фиала 233
12.6. Упражнения 235
Вероятностный взгляд: *Несбалансированные матрицы* 237

Глава 13. **Геометрия** 238
13.1. Наибольший угол между точками в евклидовом пространстве 239
13.2. Пустые треугольники, определяемые точками плоскости 240
13.3. Геометрическая реализация ± 1-матриц 242
13.4. ε-сети и VC-размерности ранжированных пространств 244

13.5. Двойственная функция расщепления и разброс 250
13.6. Упражнения 253
Вероятностный взгляд: *Эффективная упаковка* 254

Глава 14. **Коды, игры и энтропия** 256
14.1. Коды 256
14.2. Игра лжеца 259
14.3. Игра «постоянная должность» 261
14.4. Игра «балансировка векторов» 263
14.5. Неадаптивные алгоритмы 265
14.6. Энтропия 266
14.7. Упражнения 272
Вероятностный взгляд: *Экстремальные графы* 273

Глава 15. **Дерандомизация** 275
15.1. Метод условных вероятностей 275
15.2. d-независимые случайные величины в пространствах малого размера 280
15.3. Упражнения 284
Вероятностный взгляд: *Число пересечений, инцидентности, суммы и произведения* 285

Приложение A. **Оценки для больших уклонений** 287
A.1. Оценки для больших уклонений 287
A.2. Упражнения 295
Вероятностный взгляд: *Графы, свободные от треугольников, содержат большие независимые множества* 296

Приложение B. **Пол Эрдёш** 298
B.1. Труды 298
B.2. Гипотезы 300
B.3. Об Эрдёше 301
B.4. Дядюшка Пол 302

Литература 305

Предметный указатель 314

Именной указатель 319

Предисловие редактора перевода

Мне приятно представить читателю эту замечательную книгу двух выдающихся специалистов в области дискретной математики. Нога Алон — член Национальной Академии наук Израиля, автор более чем трехсот работ по комбинаторике и теории сложности, обладатель премий Эрдёша (1989), Фейера (1991), Пойа (2000), Бруно (2001), Ландау (2005), Гёделя (2005). Джоэл Спенсер — профессор Института Куранта Нью-Йоркского университета, автор около двухсот работ по теории случайных графов, комбинаторике и теории сложности, соавтор Пола Ердёша по книге «Случайные графы», один из основателей и главных редакторов журнала «Случайные структуры и алгоритмы». Авторы являются членами редакций многих математических журналов. Они неоднократно приглашались в качестве пленарных докладчиков на международные конференции и конгрессы. Не последнее место в ряду их достижений занимает монография «Вероятностный метод»

Первое издание книги, вышедшее в свет в 1991 г., стало одной из самых цитируемых книг в сообществе математиков, специализирующихся в области дискретной математики, информатики и применения вероятностных методов. Идея перевода ее на русский язык возникла еще в 1993 г., когда Джоэл Спенсер подарил мне экземпляр «Вероятностного метода» и еще более окрепла, когда я получил второе издание книги от Н. Алона. Благодаря Российскому фонду фундаментальных исследований идея перевода книги стала реальностью.

Главная цель монографии — изложение идей вероятностного подхода к решению задач дискретной математики. Авторы явно придерживаются известного тезиса о том, что пример учит лучше, чем теория. Подбор примеров внутри глав отвечает самым высоким требованиям целесообразности и вкуса, а примеры, помещенные в промежутках между главами, являются избранными шедеврами. По существу, это — мастер-класс двух маэстро для лиц, заинтересованных в освоении вероятностных методов.

В книге делается акцент на методологии. При относительно небольшом объеме она обладает высокой плотностью идей, приходящихся на страницу текста. Авторы часто жертвуют законченностью результатов в пользу ясности и краткости изложения. Строгое изложение утверждений как правило предваряется содержательным обсуждением метода. Наличие упражнений способствует более продуктивному восприятию материала и приобретению навыков в применении методов.

Книга Н. Алона и Д. Спенсера удачно дополняет монографии отечественных авторов В. Ф. Колчина, В. Н. Сачкова, Б. А. Севастьянова, В. П. Чистякова и др. по аналогичной тематике.

Книга будет полезна специалистам в области дискретной математики (комбинаторики, теории сложности, приложений теории вероятностей) как краткая энциклопедия приемов, связанных с применением вероятностных методов. Преподаватели вузов найдут в ней обширный материал для спецкурсов и аспирантских экзаменов. Известно, что спецкурсы по материалам книги читаются во многих университетах мира, в том числе и российских. Книга будет полезна студентам и аспирантам математических специальностей для первоначального ознакомления с предметом. Она доступна читателям, знакомым с университетскими курсами математического анализа и теории вероятностей. Специалисты в области теории вероятностей найдут много замечательных примеров применения вероятностных методов в комбинаторике и тории чисел.

Авторы иногда используют устоявшиеся понятия без определений. Для читателей, знакомых с университетским курсом дискретной математики, это не доставляет каких-либо неудобств. В книгах, добавленных при переводе, можно найти все используемые здесь понятия.

Над переводом книги работали Ф. Ю. Воробьев, К. Г. Омельянов, Т. Г. Петросян и автор этих строк. Общее редактирование осуществлялось мною. Т. В. Андреева много сделала для улучшения стиля перевода. А. Б. Дайняк принял участие в подготовке оригинал-макета. Весьма ценные замечания сделаны Н. Н. Кузюриным, Д. С. Романовым и Б. С. Стечкиным. Г. А. Махина оказала нам помощь при переводе эпиграфов к главам.

Авторы книги любезно предоставили электронный вариант рукописи и список замечаний от читателей, что предотвратило внесение опечаток при наборе формул и позволило исправить некоторые имеющиеся.

Редактор берет на себя ответственность за качество перевода и будет признателен всем, кто укажет на его возможные недостатки.

А. А. Сапоженко

Предисловие авторов к русскому изданию

Написание предисловия к книге вещь всегда приятная, поскольку на самом деле является завершением долгой работы над проектом. Нам доставляет особое удовольствие написать предисловие к русскому изданию *Вероятностного метода* поскольку в данном случае большая, тщательная и профессиональная работа по переводу выполнена А. А. Сапоженко и его аспирантами К. Омельяновым, Т. Петросяном и Ф. Воробьевым, в то время как наша задача состояла в основном в добавлении этих коротких комментариев.

Открытие того, что детерминированные утверждения могут быть доказаны с помощью вероятностных соображений, позволило уже в первой половине XX в. доказать ряд замечательных утверждений из анализа, теории чисел, комбинаторики и теории информации. Вскоре стало ясно, что метод, который сейчас называется *вероятностным*, является весьма мощным инструментом получения результатов в дискретной математике. Ранние результаты такого сорта сочетали комбинаторные соображения с элементарной вероятностной техникой, однако развитие метода в последние годы потребовало применения все более изощренных инструментов теории вероятности.

Применение вероятностного метода в дискретной математике было инициировано Полом Эрдёшем, который сделал для его развития больше, чем кто-либо другой. Полученные им результаты можно разбить на три группы. К первой относится изучение определенных классов комбинаторных объектов, таких как случайные графы или случайные матрицы. Эти результаты по существу являются теоретико-вероятностными, хотя большинство из них мотивировано задачами из комбинаторики. Вторая группа состоит из примеров применения вероятностных соображений для доказательства существования комбинаторных структур, обладающих рядом предписанных свойств. Доказательства существования такого типа часто приводят к экстремальным решениям различных задач дискретной математики. Третья группа состоит из самых поразительных примеров, фокусирующих внимание на применении вероятностных соображений к доказательству тех утверждений, формулировка которых не дает каких-либо указаний на то, что вероятность может быть полезна при их исследовании. Книга содержит результаты каждой из этих трех групп.

Многие фундаментальные и наиболее важные элементы теории вероятностей были получены русскими математиками. Такие исследователи как П. Л. Чебышёв, А. А. Марков, А. Я. Хинчин и А. Н. Колмогоров заложили основы теории вероятностей, обеспечив тем самым математические основы для последующего развития вероятностного метода. Таким образом, русское издание данной книги основано в значительной мере на достижениях российской математики.

Нам очень приятно выразить свою признательность нашему другу и коллеге Александру Сапоженко за идею перевода нашей книги, а также всем, кто способствовал успешному осуществлению этой идеи. Мы убеждены, что этот перевод сделает книгу доступной для широкого круга российских исследователей.

Нога Алон
Джоэл Спенсер

Посвящается Нурит и Мэри Энн

Предисловие

В последнее время наблюдается весьма интенсивное развитие вероятностного метода. Он стал самым мощным и широко применяемым инструментом в комбинаторике. Одной из главных причин столь быстрого развития является важная роль случайности в теоретической информатике — области, которая является в настоящее время источником многих интересных комбинаторных задач.

Взаимосвязь между дискретной математикой и информатикой подразумевает алгоритмическую точку зрения при изучении вероятностного метода в комбинаторике, и именно такой подход мы пытались проводить в этой книге. Поэтому монография включает обсуждение алгоритмических аспектов наряду с изучением классического метода и современных приемов, применяемых в ней. Первая часть книги содержит описание методов, применяемых в вероятностных доказательствах, включая традиционную технику, использующую математическое ожидание и дисперсию, а также более современные методы, связанные с применением мартингалов и корреляционных неравенств. Вторая часть включает изучение различных тем, в которых вероятностная техника оказалась весьма успешной. Эта часть содержит главы, посвященные разбросу и случайным графам, а также некоторым областям теоретической информатики: сложности логических схем, вычислительной геометрии и дерандомизации вероятностных алгоритмов. Промежутки между главами заполнены жемчужинами под общим заголовком «Вероятностный взгляд». Они представляют собой элегантные доказательства, относящиеся к главам, после которых они появляются и, как правило, могут читаться отдельно.

Основная идея вероятностного метода может быть описана следующим образом: чтобы доказать существование комбинаторной структуры с определенными свойствами, мы конструируем соответствующее вероятностное пространство и показываем, что случайно выбранный элемент этого пространства обладает данными свойствами с положительной вероятностью. Этот метод был предложен Полом Эрдёшем, который за последние пятьдесят лет внес в его развитие столь значительный вклад, что представляется справедливым назвать его «методом Эрдёша». Его вклад состоит не только в огромном числе глубоких результатов, касающихся вероятностного подхода, но также во многих интересных проблемах и гипотезах, которые в значительной степени стимулировали исследования в этой области.

Написание энциклопедической книги по вероятностному методу представляется невозможным. Слишком много новых интересных результатов получено с помощью вероятностных соображений, и мы не пытаемся даже упомянуть каждый из них. В книге делается акцент на методологию. Главной целью является изложение идей. Поэтому мы не всегда приводим наилучший известный результат, если он технически слишком сложен для того, чтобы ясно изложить его. Многие результаты являются асимптотическими. При их изложении используются стандартные асимптотические обозначения. Пусть f и g — две функции, мы пишем $f = O(g)$, если $f \leqslant c_1 g + c_2$ для всех значений переменных, где c_1, c_2 — абсолютные константы. Мы пишем $f = \Omega(g)$, если $g = O(f)$, и $f = \Theta(g)$, если $f = O(g)$ и $f = O(g)$. Запись $f = o(g)$ означает, что предел отношения f/g стремится к нулю при стремлении переменных этих функций к бесконечности. Наконец, $f \sim g$ означает, что $f = (1 + o(1))g$, т. е. что f/g стремится к 1, когда переменные стремятся к бесконечности.

Каждая глава заканчивается упражнениями. Наиболее трудные помечены символом *. Упражнения, добавленные в этом издании книги, позволяют читателю проверить понимание материала, а также дают возможность использовать книгу как учебник.

Кроме этих упражнений второе издание содержит некоторые улучшенные результаты и развивает различные темы, обсуждавшиеся в первом издании. Среди добавлений упомянем следующие. В гл. 3 описан непрерывный подход к дискретным вероятностным задачам, в гл. 7 излагаются некоторые новые неравенства для концентрации, в гл. 13 обсуждаются отношения между разбросом и VC-размерностью, в гл. 14 описываются некоторые приложения функции энтропии и ее свойства. Имеются также добавления в последних двух «Вероятностных взглядах» и новое приложение о Поле Эрдёше, в котором приведены список его статей, его гипотезы и воспоминания о нем.

С особым удовольствием мы благодарим наших жен Нурит и Мэри Энн. Их терпение, понимание и поддержка явились ключевым моментом в успехе данного предприятия.

Нога Алон
Джоэл Спенсер

Благодарности

Мы очень признательны нашим студентам и коллегам, принявшим участие в создании второго издания книги путем совместных публикаций, полезных обсуждений и ценных замечаний. В их числе: Грег Бачелис, Амир Дембо, Эхуд Фрейтгут, Марк Фоссорье, Донг Фу, Сванте Янсон, Гай Котцерс, Михаил Кривелевич, Альберт Ли, Боян Моар, Янош Пач, Ювал Перес, Аравинд Шринивасан, Бенни Судаков, Тибор Сабо, Грег Соркин, Джон Тромп, Дэвид Уилсон, Ник Уормалд и Ури Цвик, которые указали на различные небрежности и ошибки. Их предложения позволили улучшить изложение и результаты. Необходимо отметить, что ответственность за остающиеся ошибки, так же как и ответственность за новые ошибки (надеемся, что их немного) лежит целиком на нас.

С удовольствием благодарим Орена Нечуштана за большую техническую работу, проделанную при окончательной подготовке рукописи.

Часть I

МЕТОДЫ

1

Основы

Все, что нужно, — это чтобы ваш разум был открыт.

Пол Эрдёш

1.1. ВЕРОЯТНОСТНЫЙ МЕТОД

Вероятностный метод является мощным инструментом для решения многих задач дискретной математики. Грубо говоря, этот метод работает следующим образом: пытаясь доказать, что структура с некоторыми искомыми свойствами существует, мы определяем подходящее вероятностное пространство структур, а затем показываем, что искомые свойства выполняются для случайно выбранного элемента в этом пространстве с положительной вероятностью.

Метод лучше всего проиллюстрировать примерами. Ниже — один из них. Число Рамсея $R(k,l)$ есть наименьшее целое n, такое, что при любой раскраске ребер полного n-вершинного графа в синий и красный цвета либо существует красный подграф K_k (т. е. полный подграф на k вершинах, каждое ребро которого раскрашено в красный цвет), либо существует синий подграф K_l. В 1929 г. Рамсей показал, что число $R(k,l)$ конечно для любых k и l. Мы найдем нижнюю оценку для диагонального числа Рамсея $R(k,k)$.

Предложение 1.1.1. *Если* $\binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, *то* $R(k,k) > n$. *Таким образом,* $R(k,k) > \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ *для всех* $k \geqslant 3$.

Доказательство. Рассмотрим случайную раскраску ребер графа K_n, полученную раскраской каждого из ребер независимо в красный или синий цвет, причем каждый цвет появляется с равной вероятностью. Определим для каждого фиксированного k-вершинного множества R событие A_R, состоящее в том, что подграф графа K_n, порожденный подмножеством R, является *монохроматическим* (т.е. либо все его ребра являются красными, либо все являются синими. Очевидно, что $\Pr[A_R] = 2^{1-\binom{k}{2}}$. Так как существует $\binom{n}{k}$ возможностей для выбора R, вероятность того, что по крайней мере одно из событий A_R произойдет, не больше чем $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < 1$. Таким образом, с положительной вероятностью ни одно из событий A_R не произойдет, а значит, существует 2-раскраска графа K_n без монохроматических подграфов K_k, т. е. $R(k,k) > n$.

Заметим, что если $k \geqslant 3$ и $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$, то $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{2^{1+\frac{k}{2}}}{k!} \cdot \frac{n^k}{2^{k^2/2}} < 1$, а, следовательно, $R(k,k) > \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ для всех $k \geqslant 3$. ■

Этот простой пример демонстрирует суть вероятностного метода. Чтобы доказать существование хорошей раскраски, мы вовсе не должны предъявить ее явно. Достаточно неконструктивным образом показать, что она существует. Этот пример появился в статье П. Эрдёша в 1947 г. Хотя уже в 1943 г. Селе применил вероятностный метод к другой комбинаторной задаче, упомянутой в гл. 2, Эрдёш был определенно первым, кто вполне осознал силу этого метода и на протяжении многих лет успешно применял его для решения большого числа задач.[1)] Можно, конечно, сказать, что в рассмотренном выше примере легко обойтись и без вероятности. Столь же простое доказательство можно получить чисто комбинаторным путем. Достаточно лишь убедиться в том, что общее число 2-раскрасок графа K_n больше числа тех, что содержат монохроматический подграф K_k.

Кроме того, поскольку большинство вероятностных пространств, рассматривавшихся при изучении комбинаторных задач, являются конечными, это утверждение справедливо в отношении большинства приложений вероятностного метода в дискретной математике. Теоретически это так. Однако на практике использование понятия вероятности является существенным. Было бы безнадежно пытаться заменить применение многих изложенных в книге приемов — например, метод второго момента, локальную лемму Ловаса и доказательство концентрации с помощью мартингалов — комбинаторными соображениями даже в случае их применения к конечным вероятностным пространствам.

Вероятностный метод имеет интересный алгоритмический аспект. Рассмотрим, например, доказательство предложения 1.1.1, которое показывает, что существует реберная 2-раскраска графа K_n без монохроматических клик $K_{2\log_2 n}$. Можем ли мы представить такую раскраску явно? Такой вопрос, как уже говорилось, может показаться нелепым. Ведь общее число возможных раскрасок конечно, поэтому можно проверить их все, пока не найдем подходящую. Однако такая процедура может потребовать $2^{\binom{n}{2}}$ проверок. Это количество экспоненциально относительно размера входа задачи $\bigl($равного $\binom{n}{2}\bigr)$. Алгоритмы, время работы которых больше полинома от размера (входа) задачи, обычно рассматриваются как практически неприменимые. Класс задач, которые решаются за полиномиальное время, обычно обозначается через **P** (см., например, [Aho, Hopcroft and Ullman (1974)]) и рассматривается как класс разрешимых задач. В этом смысле подход, связанный с полным перебором, в применении к поиску хорошей раскраски графа K_n, неприемлем, и в этом причина нашего замечания о неконструктивности доказательства предложения 1.1.1. Оно не дает конструктивного, эффективного и детерминированного алгоритма

[1)] Отметим, что в 1942 г. появилась статья [Гончаров (1942)], в которой с помощью теоретико-вероятностных методов решались комбинаторные задачи о числе циклов в перестановках (см. также [Гончаров (1944)]). — *Прим. ред.*

построения раскраски с требуемыми свойствами. Однако, более внимательный взгляд на доказательство показывает, что оно может быть использовано для эффективного построения раскраски, которая с большой вероятностью является хорошей. В самом деле, для больших k при $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ выполнено $\binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{2^{1+\frac{k}{2}}}{k!}\left(\frac{n}{2^{k/2}}\right)^k \leqslant \frac{2^{1+\frac{k}{2}}}{k!} \ll 1$. Следовательно, случайная раскраска графа K_n с большой вероятностью не содержит монохроматических подграфов $K_{2\log n}$. Это означает, что если по некоторой причине *необходимо* представить явно 2-раскраску ребер графа K_{1024} без монохроматических подграфов K_{20}, то можно просто подбросить правильную монету $\binom{1024}{2}$ раз и тем самым получить требуемую раскраску с достаточной степенью уверенности. Вероятность того, что раскрашенный полный граф содержит монохроматический подграф K_{20}, меньше $\frac{2^{11}}{20!}$, что, наверное, гораздо меньше, чем шанс совершить ошибку в любом строгом доказательстве того, что некоторая раскраска является хорошей! Следовательно, в некоторых случаях вероятностный, неконструктивный метод дает эффективные вероятностные алгоритмы. Эта тема достаточно подробно обсуждается в гл. 15.

Вероятностный метод является мощным инструментом в комбинаторике и теории графов. Он оказывается также крайне полезным в теории чисел и вычислительной геометрии. С недавних пор он стал применяться для разработки эффективной алгоритмической техники и при изучении различных вычислительных задач. В конце этой главы мы приведем простые примеры, демонстрирующие широкий спектр вопросов, для решения которых полезен этот метод. Более сложные примеры, включающие более тонкие вероятностные соображения, появятся в дальнейшем.

1.2. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Турнир $T = (V, E)$ на множестве V из n игроков есть результат ориентации ребер полного графа со множеством вершин V. Таким образом, для любых двух элементов x и y множества V либо пара (x, y), либо пара (y, x) принадлежат множеству E, но не обе вместе. Название «турнир» вполне естественно, поскольку его можно представлять себе как множество игроков V, в котором каждая пара участников проводит одну встречу, а присутствие дуги (x, y) означает, что x *побеждает* y. Скажем, что T обладает свойством S_k, если в каждом множестве из k игроков найдется хотя бы один, который побеждает их всех. Например, ориентированный треугольник $T_3 = (V, E)$, в котором $V = \{1, 2, 3\}$ и $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$, обладает свойством S_1. Верно ли, что для любого конечного k существует турнир T (с более чем k вершинами), обладающий свойством S_k? Как показал Эрдёш [Erdős (1963b)], эта проблема, поставленная Шютте, может быть решена почти тривиально с помощью вероятностных соображений. Более того, эти соображения позволяют получить довольно точную оценку минимально возможного числа вершин в таком турнире. Основная (и естественная) идея заключается в том, что если n достаточно велико как функция аргумента k, то *случайный турнир* на множестве $V = \{1, \ldots, n\}$ из

n игроков с большой вероятностью обладает свойством S_k. Под случайным турниром мы подразумеваем турнир T на множестве вершин V, полученный выбором для каждой пары $1 \leqslant i < j \leqslant n$ независимо или дуги (i, j), или дуги (j, i), причем каждая из этих возможностей равновероятна. Заметим, что при этом все $2^{\binom{n}{2}}$ возможных турниров на множестве V равновероятны, т. е. рассматриваемое вероятностное пространство симметрично. Мы часто используем симметричные вероятностные пространства в приложениях. В этих случаях мы будем иногда говорить об элементе пространства как о *случайном элементе*, без точного описания распределения вероятностей. Так, например, в доказательстве предложения 1.1.1 рассматривались случайные 2-раскраски, т. е. все возможные раскраски были равновероятны. Аналогично, в доказательстве следующего простого результата мы изучаем случайные турниры на множестве V.

Теорема 1.2.1. *Если $\binom{n}{k}(1-2^{-k})^{n-k} < 1$, то существует турнир на n вершинах, обладающий свойством S_k.*

Доказательство. Рассмотрим случайный турнир на множестве $V = \{1, \ldots, n\}$. Для каждого фиксированного k-элементного подмножества K множества V определим событие A_K, состоящее в том, что не существует вершины, которая побеждает все вершины из K. Ясно, что $\Pr[A_K] = (1-2^{-k})^{n-k}$, поскольку для каждой фиксированной вершины $v \in V - K$ вероятность того, что v не побеждает всех игроков из K, равна $1 - 2^{-k}$, и все эти $n-k$ событий, соответствующих различным выборам вершин v, независимы. Отсюда следует, что

$$\Pr\left[\bigvee_{\substack{K \subset V \\ |K|=k}} A_K\right] \leqslant \sum_{\substack{K \subset V \\ |K|=k}} \Pr[A_K] = \binom{n}{k}(1-2^{-k})^{n-k} < 1.$$

Следовательно, с положительной вероятностью ни одно из событий A_K не происходит, т. е. существует турнир на n вершинах, обладающий свойством S_k. ∎

Пусть $f(k)$ — минимальное число вершин в турнире, обладающем свойством S_k. Поскольку $\binom{n}{k} < \left(\frac{en}{k}\right)^k$ и $(1-2^{-k})^{n-k} < e^{-(n-k)/2^k}$, из теоремы 1.2.1 следует, что $f(k) \leqslant k^2 \cdot 2^k \cdot (\ln 2)\bigl(1 + o(1)\bigr)$. Нетрудно проверить, что $f(1) = 3$ и $f(2) = 7$. Как доказал Секереш (см. книгу [Moon (1968)]), $f(k) \geqslant c_1 \cdot k \cdot 2^k$.

Существует ли явная конструкция турнира с не более чем c_2^k вершинами, обладающего свойством S_k? Такая конструкция известна, но нетривиальна. Мы опишем ее в гл. 9.

Доминирующим называется такое множество $U \subseteq V$ неориентированного графа $G = (V, E)$, что всякая вершина $v \in V - U$ имеет хотя бы одного соседа в U.

Теорема 1.2.2. *Пусть $G = (V, E)$ — граф с n вершинами и минимальной степенью $\delta > 1$. Тогда G имеет доминирующее множество с не более чем $n\frac{1+\ln(\delta+1)}{\delta+1}$ вершинами.*

[. . .]

условиям

$$\mathbf{E}[Y] = \sum_{B \in \mathcal{F}} \left(v(B)/m\right)^t = \frac{1}{m^t} \cdot m \left(\frac{\sum v(B)^t}{m}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{m^t} \cdot m \left(\frac{2d(\mathcal{F})}{m}\right)^t \geqslant 2m^{1-t\delta^2/2}. \quad (1.3)$$

Так как $Y \leqslant m$, то

$$\Pr[Y \geqslant m^{1-t\delta^2/2}] \geqslant m^{-t\delta^2/2}. \quad (1.4)$$

Легко проверить, что при $t = \lceil 1 + 1/\delta \rceil$ выполняется $m^{1-t\delta^2/2} > 2^{n/2}$, и правая часть неравенства (1.4) больше правой части неравенства (1.2). Итак, с положительной вероятностью выполняется неравенство $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_t| > n/2$ и, к тому же, это объединение не пересекается с более чем $2^{n/2}$ множествами из семейства $\mathcal{F}$. Это противоречие доказывает неравенство (1.1). ■

1.6. УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что если существует действительное число p, $0 \leqslant p \leqslant 1$, такое, что
$$\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{t} (1-p)^{\binom{t}{2}} < 1,$$
то число Рамсея $R(k,t)$ удовлетворяет неравенству $R(k,t) > n$. С использованием этого доказать неравенство
$$r(4,t) \geqslant \Omega(t^{3/2}/(\ln t)^{3/2}).$$

2. Пусть $n \geqslant 4$, и H является n-однородным гиперграфом с не более чем $\frac{4^{n-1}}{3^n}$ ребрами. Доказать, что существует раскраска вершин графа H в четыре цвета, такая, что в каждом ребре представлены все эти четыре цвета.

3.* Доказать, что для любых двух независимых, одинаково распределенных действительных случайных величин X и Y
$$\Pr[|X - Y| \leqslant 2] \leqslant 3 \Pr[|X - Y| \leqslant 1].$$

4.* Пусть $G = (V, E)$ — граф с n вершинами, причем минимальная степень δ его вершины больше 10. Доказать, что существует разбиение множества V на два непересекающихся подмножества A и B, такое, что $|A| \leqslant O(\frac{n \ln \delta}{\delta})$ и каждая вершина из множества B имеет по крайней мере одного соседа в каждом из множеств A и B.

5.* Рассмотрим граф $G = (V, E)$ на $n \geqslant 10$ вершинах. Допустим, что при добавлении любого ребра число копий полных графов на десяти вершинах в нем увеличивается. Доказать, что число ребер в графе G не меньше, чем $8n - 36$.

[. . .]