Г. Хаггард, Дж. Шлипф, С. Уайтсайдс

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ПРОГРАММИСТОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО БИНОМ

Дискретная математика
для программистов

Discrete Mathematics for Computer Science

Gary Haggard
Bucknell University

John Schlipf
University of Cincinnati

Sue Whitesides
McGill University

THOMSON
BROOKS/COLE™

Australia · Canada · Mexico · Singapore · Spain
United Kingdom · United States

Гэри Хаггард, Джон Шлипф, Сью Уайтсайдс

Дискретная математика для программистов

Перевод с английского
Н. А. Шиховой

под редакцией
А. А. Сапоженко

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2010

УДК 519
ББК 22.176
Х13

Хаггард Г.

Х13 Дискретная математика для программистов : учебное пособие / Г. Хаггард, Дж. Шлипф, С. Уайтсайдс ; пер. с англ. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. — 627 с. : ил.

ISBN 978-5-94774-348-7

Методически продуманное учебное пособие по дискретной математике, охватывающее такие темы, как множества, математическая индукция, математическая логика, отношения, функции, анализ алгоритмов, теория графов, комбинаторика, теория вероятностей, рекуррентные соотношения. Многочисленные упражнения позволяют закрепить пройденный материал. Все упражнения с решениями представлены на прилагаемом к пособию диске.

Для преподавателей и студентов вузов, готовящих математиков-программистов, специалистов по информатике и информационно-коммуникационным технологиям, а также для старшеклассников школ с углубленным изучением математики и информатики.

УДК 519
ББК 22.176

По вопросам приобретения обращаться:
«БИНОМ. Лаборатория знаний»
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: binom@Lbz.ru, http://www.Lbz.ru

ISBN 978-5-94774-348-7

Оглавление

ПРИЛОЖЕНИЕ

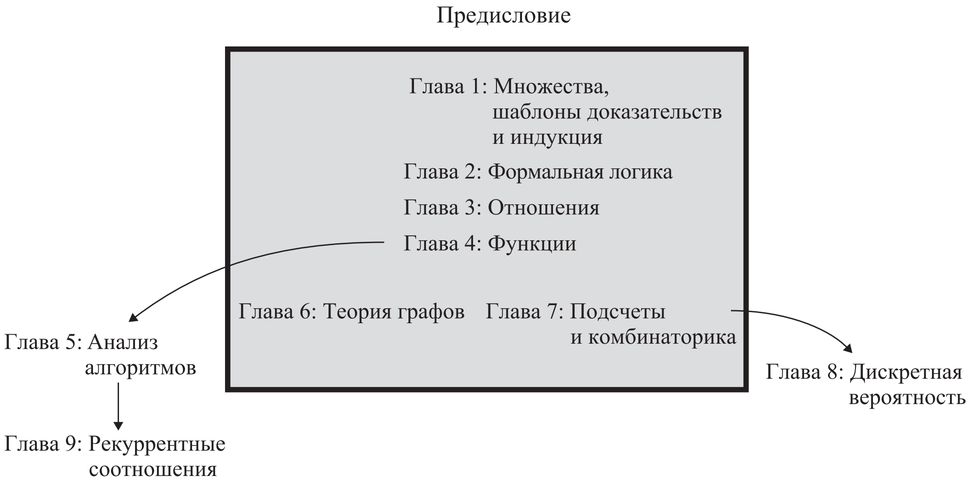
Предисловие

С развитием программирования стало ясно, что изучение дискретной математики — важная составная часть образования специалистов в компьютерных дисциплинах. Курс дискретной математики преследует две основные цели. Первая заключается в том, чтобы познакомить студентов с содержательными математическими структурами, которые естественно описывают большую часть содержания компьютерных дисциплин, включая те структуры, которые часто используются при моделировании и решении задач программирования. Вторая — помочь студентам развить умение рассуждать математически, чтобы освоить новые понятия и темы компьютерных дисциплин. Это умение нужно не только во время обучения, но и после его завершения, в процессе профессиональной деятельности.

В последние годы исследователи, работающие в таких разных областях программирования, как анализ алгоритмов, системы баз данных и искусственный интеллект, все чаще используют структуры дискретной математики, чтобы сделать более ясными ключевые понятия и задачи. Поэтому в данной книге подробно обсуждаются самые разные приложения — реляционные базы данных, сложность вычислений и нормальные формы высказываний. Это обсуждение основано на строгом, последовательном развитии фундаментальных идей в областях множеств, отношений, функций, а также теории графов и комбинаторики.

Диаграмма на с. 13 показывает, в каком порядке можно изучать материал книги. Шесть глав, перечисленных в рамке, включают в себя основные темы. Эти главы нужны, чтобы помочь студентам научиться выражать на математическом языке математически строгие идеи.

Две главы, относящиеся к теории графов и комбинаторике, тоже содержат материал, ключевой для курса дискретной математики, но этот материал студентам обычно интуитивно понятнее, чем формализм первых четырех глав. Темы из этих первых четырех глав постоянно используются в последующих разделах. Глава о дискретной вероятности основана на главе о комбинаторике. Глава об анализе алгоритмов опирается на ключевые главы, но ее материал можно изложить на неформальном уровне, чтобы познакомить студентов с этой темой, не теряя времени на проработку деталей. И наконец, глава о рекуррентных соотношениях в основном опирается на ранний материал об индукции и интуитивное понимание главы об анализе алгоритмов.



В первых четырех главах речь идет о множествах, логике, отношениях и функциях. Этот материал следует проработать всем студентам, возможно, на разных уровнях или с различной скоростью — в зависимости от программы обучения и уровня подготовки. В гл. 6 изучается теория графов, причем особое внимание уделяется примерам из программирования. Описаны ненаправленные графы, деревья и направленные графы. Глава 7 рассказывает о методах подсчета и комбинаторике, начиная с принципов сложения и умножения, и заканчивая перестановками и сочетаниями различимых и неразличимых элементов множеств, а также комбинаторными тождествами.

Дополнительные темы, такие как реляционные базы данных, языки и регулярные множества, невычислимость, конечная вероятность и рекуррентные соотношения, позволяют понять, как дискретные структуры описывают важнейшие понятия, изучаемые и используемые в программировании. Конечно же, невозможно проработать весь дополнительный материал вместе с ключевыми темами в течение одного семестра, однако он может служить основой для построения других курсов. Кроме того, этот текст может быть использован как источник различных ссылок. Множество задач позволит студентам лучше проработать изученный материал.

Студенту

Основная цель этой книги — помочь вам достичь математической зрелости. Мы имеем в виду, что постараемся подготовить вас к пониманию того, как строить доказательства результатов о дискретных структурах, выражающих понятия, с которыми вы сталкиваетесь в программировании. Корректное доказательство можно рассматривать как множество обоснованных шагов, которые убеждают другого студента, выпускника или преподавателя в истинности доказываемого утверждения. Строить доказательства непросто даже для искушенного человека, но это необходимое умение, и развить его можно только на практике. Мы можем лишь пожелать вам терпения в этой деятельности. Оттачивайте ваши доказательства на других студентах, выпускниках и преподавателях, чтобы достичь уверенности; это поможет вам пользоваться доказательствами как естественной частью вашей способности решения задач и понимания нового материала.

Решения упражнений с нечетными номерами имеются на CD, прилагающемся к книге. Эти решения служат образцом для решения других задач.

Планирование односеместрового курса

Книга содержит гораздо больше материала, чем можно изучить в течение одного семестра. Но такая избыточность позволяет использовать материал в рамках самых различных курсов. Если программа предусматривает изучение дискретной математики в течение одного семестра (13–14 недель), то следующий план позволяет проработать основной материал.

Глава 1: Множества, шаблоны доказательств и индукция *(8 лекций)*
- Основные определения
- Операции на множествах
- Принцип включения-исключения
- Математическая индукция
- Вторая форма индукции

Глава 2: Формальная логика (*4 лекции*)
- Введение в логику высказываний
- Истина и логическая истина
- Предикаты и кванторы

Глава 3: Отношения (*5 лекций*)
- Определения и операции
- Специальные типы отношений
- Отношения эквивалентности
- Отношения порядка

Глава 4: Функции (*4 лекции*)
- Основные определения
- Операции на функциях
- Принцип Дирихле

Глава 5: Анализ алгоритмов (*2 лекции*)
- Сравнение скорости роста функций
- Сложность программ

Глава 6: Теория графов (*4 лекции*)
- Определения
- Связные графы
- Задача о кенигсбергских мостах
- Деревья
- Остовные деревья
- Направленные графы (дополнительно)

Глава 7: Подсчеты и комбинаторика (*4–5 лекций*)
- Принципы подсчета

Перестановки и сочетания
Перестановки и сочетания с повторениями
Комбинаторные тождества (дополнительно)
Треугольник Паскаля (дополнительно)

Если в течение семестра предполагается прочитать около 40 лекций, такой вариант планирования оставляет время для проверочных работ, а также дополнительное время, чтобы учесть особенности учебного плана и/или пожелания студентов. Единственная глава, которая часто переносится в другие курсы — это гл. 5. Однако, если позволяет время, ей все-таки стоит уделить внимание, потому что в ней подробно разбираются соотношения между программами и их сложностью.

В зависимости от того, какие еще курсы предусмотрены в программе обучения, можно ввести некоторые изменения. Иногда темы гл. 1–4, в частности, основные свойства множеств и функций, включаются в курсы, изучавшиеся студентами ранее; в курсе дискретной математики будет достаточно их кратко повторить. Однако разделам об индукции, принципе включения-исключения и принципе Дирихле внимание нужно уделить обязательно. Или если, например, в курсах программирования уже изучался анализ алгоритмов, то гл. 4 достаточно будет только повторить, уделив ей меньше времени. По желанию может быть опущен материал по направленным графам. В зависимости от структуры программы сэкономленное время можно потратить на другой материал из книги.

Планирование триместрового курса

Если в течение триместра предусмотрено только 30 лекций, то придется сократить приведенный выше вариант планирования до 27 лекций.

Если материал гл. 5 изучается в других курсах программирования, то здесь его можно опустить. Кроме того, если в других курсах математики обсуждается понятие функции, то из гл. 4 достаточно изучить принцип Дирихле, что позволить сэкономить по крайней мере одну лекцию. И наконец, если исключить материал по направленным графам, то основные идеи теории графов можно обсудить за четыре лекции. К тому же девять лекций для гл. 1 и 2 можно сократить на одну или две лекции.

С учетом этих замечаний для триместрового курса (10 недель) можно предложить следующий вариант планирования.

Глава 1: Множества (*7 лекций*)
Основные определения
Операции на множествах
Принцип включения-исключения
Математическая индукция
Вторая форма индукции

Глава 2: Формальная логика (*3 лекции*)
Введение в логику высказываний
Истина и логическая истина
Предикаты и кванторы

Глава 3: Отношения (*4 лекции*)
Определения и операции
Специальные виды отношений
Отношения эквивалентности
Отношения порядка

Глава 4: Функции (*3 лекции*)
Основные определения
Операции на функциях
Принцип Дирихле

Глава 6: Теория графов (*4 лекции*)
Определения
Связные графы
Задача о кенигсбергских мостах
Деревья
Остовные деревья

Глава 7: Подсчеты и комбинаторика (*4 лекции*)
Принципы подсчета
Перестановки и сочетания
Перестановки и сочетания с повторениями

Какого бы варианта планирования вы ни придерживались, число лекций должно быть таким, чтобы оставалось время для двух или трех проверочных работ и для повторения. К тому же преподавателю следует найти время, чтобы посвятить целый день задачам, представляющим особый интерес для студентов, не отвлекаясь на подачу нового материала.

Требуется помощь

Авторы прилагали все усилия, чтобы в тексте было как можно меньше ошибок. Излишне говорить, что мы не совершенны, и по-видимому, пропустили некоторые ошибки и неточности, которые нужно исправить. Мы будем очень благодарны, если нам сообщат о любых замеченных ошибках. Присылайте ваши комментарии по адресу haggard@bucknell.edu, не забудьте указать ваш адрес обычной или электронной почты. Мы будем признательны за любую помощь и сообщим вам, если кто-то уже заметил обнаруженную вами проблему. Мы хотим, чтобы эта книга стала как можно лучше, и поэтому благодарны всем, кто окажет какую-либо помощь. Все сделанные изменения мы разместим по адресу http://www.eg.bucknell.edu/~discrete/errorfile.eps.

Гэри Хаггард
Джон Шлипф
Сью Уайтсайдс

ГЛАВА 1

Множества, шаблоны доказательств и индукция

Понятие *множества* лежит в основе многих разделов современной математики и компьютерных дисциплин. Мы будем опираться на это понятие для построения всех остальных структур в этой книге. Поэтому вначале нам потребуется овладеть языком теории множеств и операциями, которые обычно производят над множествами. Язык множеств очень точен. Если пользоваться им аккуратно, то наградой будет точность при постановке задач и описании их решений. Понимание основных операций на множествах и свойств этих операций станет базой для введения большинства других дискретных структур в этой книге. Углубляя наше понимание операций над множествами, мы научимся технике доказательства, которая пригодится нам при изучении других тем дискретной математики — таких, как отношения, функции и графы. Мы будем использовать эти методы доказательства, например, для того, чтобы обосновать корректность алгоритмов и определить, насколько хорошо мы выбрали алгоритм для определенной задачи.

В данной главе пять главных разделов. В первом из них вводятся понятие множества и язык для описания наборов элементов. Кроме того, в этом разделе вводятся некоторые шаблоны доказательств, которые помогут нам понимать и строить доказательства. Во втором разделе идет речь об обычных операциях на множествах: объединении, пересечении, дополнении, произведении и возведении в степень. Приведены еще несколько шаблонов доказательств, использованных в теоремах этого раздела. В третьем разделе дан способ подсчитывать число элементов в таком наборе множеств, в котором некоторые множества могут иметь общие элементы. В четвертом и пятом разделах мы расскажем об одном важном методе доказательства — *принципе математической индукции* и о *сильной форме принципа математической индукции*. Мы будем пользоваться индукцией для нахождения множества элементов, для которого истинно некоторое утверждение о целых числах.

Принцип математической индукции в любой из двух его форм важен тем, что его применяют для доказательства корректности алгоритмов, не выполняя их на компьютере.

1.1. Основные определения

Суть понятия множества проста: **множество** — это набор элементов. Множество {белый, красный, зеленый} включает названия красного, белого и зеленого цветов, и только их.

Множество $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 100\,345\,679\,231\}$ включает семь целых чисел. Множество {красный, желтый, синий} включает названия основных цветов. Множество марок, размещенных в кляссере на полке, обычно называют коллекцией марок. В следующее множество входят бывшие президенты Соединенных Штатов:

$$\{\text{Джордж Вашингтон, Джон Адамс, Том Джефферсон}, \ldots\}.$$

Знак «...» называется многоточием и указывает на то, что в списке содержатся еще и другие элементы.

В чем состоит основное свойство множества? Для произвольного множества A и произвольного элемента b верно ровно одно из двух высказываний: либо b входит в A, либо b не входит в A. Если спросить, входит ли некоторый элемент в некоторое множество, ответ будет либо «да», либо «нет».

Входит ли 0 в множество $\{1, 2\}$? Нет.
Входит ли 0 в множество $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 100\,345\,679\,231\}$? Да.
Входит ли Нью-Йорк в множество {Ливерпуль, Лондон, Лос-Анджелес }? Нет.
Входит ли «зеленый» в множество {красный, желтый, синий}? Нет.
Входит ли Нью-Йорк в множество {Англия, Франция, Соединенные Штаты}? Нет.

Согласно математической терминологии 0 **является элементом множества** $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 100\,345\,679\,231\}$, а «зеленый» **не является элементом множества** {красный, желтый, синий}.

Выражение «являться элементом множества» обозначается символом $\in$ — видоизмененной греческой буквой эпсилон. Например, мы записываем

$$0 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 100\,345\,679\,231\}$$

и

$$\text{зеленый} \notin \{\text{красный, синий, желтый}\}.$$

Черта, перечеркивающая символ $\in$, означает *не,* точно так же, как для символа $\neq$. **Принадлежать, содержаться в,** или просто **входить в** означает то же самое, что «быть элементом». Математический язык, как и обычный, полон синонимов.

Несмотря на частое употребление, термин *множество* не определяется через другие понятия. Как и термины *точка* и *прямая* в планиметрии, *множество* — неопределяемое понятие. Мы просто условимся, что существуют элементы, множества, и что для множества A и элемента b утверждение $b \in A$ либо истинно, либо ложно.

Важно различать 1 и $\{1\}$. Это не одно и то же. Сама по себе единица является числом, а не множеством, а $\{1\}$ — множество, содержащее элемент 1. Точно так же, $\{1\}$ и $\{\{1\}\}$ — не одно и то же: $1 \in \{1\}$, но $\{1\} \notin \{1\}$. Кроме того, $\{1\} \in \{\{1\}\}$, но $1 \notin \{\{1\}\}$. Аналогично, в множество $\{1, 2\}$ входят два элемента, 1 и 2, но в $\{\{1, 2\}\}$ входит только один элемент — $\{1, 2\}$.

Не имеет значения ни то, сколько раз элемент входит в список, ни порядок перечисления элементов. Например, элементы множества $\{2, 3\}$ — это 2 и 3. Элементы множества $\{3, 2, 2\}$ — тоже 2 и 3. Поэтому эти два множества содержат одни и те же элементы. Таким образом, эти два множества *равны,* в чем мы убедимся позднее.

1.1.1. Математическое описание множеств

Мы приведем три разных способа описания множеств. Первый из них состоит в перечислении всех элементов. Второй — в описании множества при помощи некоторого свойства, которым обладают элементы множества. Третий способ основан на использовании некоторых других множеств. Во всех этих способах для того, чтобы указать, что речь идет о множестве, мы используем символы $\{$ и $\}$. «Язык», используемый для описания множеств, называется **теоретико-множественными обозначениями.**

Теоретико-множественные обозначения

Имеется три способа описать множество с элементами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9:

1. Перечислить элементы, заключив их в фигурные скобки: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Мы можем также записать этот список в сокращенном виде: $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.
2. Описать элементы при помощи некоторого свойства, которому они удовлетворяют:
$$\{x : x \text{ целое и } x > -1/2, \text{ и } x < 19/2\}.$$
Эту запись следует читать так: «множество (всех) x таких, что x — целое число, и x больше минус одной второй, и x меньше девятнадцати вторых». Двоеточие означает «таких, что». Выражение после двоеточия описывает свойство, которым обладают элементы x.
3. Описать элементы как множество всех элементов *некоторого другого множества*, которые удовлетворяют некоторому свойству. Если $\mathbb{Z}$ обозначает множество целых чисел, то в нашем случае множество может быть определено так:
$$\{x \in \mathbb{Z} : x > -1/2 \text{ и } x < 19/2\}.$$

Способы 2 и 3 почти одинаковы. Однако третий способ предпочтительней. Это обусловлено тем, что в некоторых, очень особенных ситуациях, второй способ может привести к трудностям.[1)]

[1)] После того, как Кантор построил теорию множеств, были обнаружены некоторые парадоксы. Самый известный из них — парадокс Рассела, чем-то похожий на так называемый «парадокс лжеца»: «Это высказывание ложно». Проверим истинность этого высказывания: если оно ложно, то оно истинно, а если оно истинно, то ложно.

Использование многоточия — серьезный недостаток первого метода. Когда записывают

$$A = \{0, 1, 2, \dots , 7\},$$

то подразумевают, что все будут понимать эту запись так же, как предполагалось, — что множество A содержит элементы 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Но часто бывает так, что подразумеваемая закономерность не так очевидна, как кажется тому, кто использовал многоточие. Допустим,

$$A = \{2, 4, \dots , 65\,536\}.$$

Какие элементы здесь пропущены? Чтобы догадаться, что имеется в виду, нужно понимать, какой закономерности подчиняются перечисленные элементы. Поскольку $65\,536 = 2^{16}$, можно предположить, что

$$A = \{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}, 2^{11}, 2^{12}, 2^{13}, 2^{14}, 2^{15}, 2^{16}\}.$$

Но ничем не хуже предположение, что

$$A = \{2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}\} = \{2, 4, 16, 65\,536\}.$$

Имеется много других возможностей, причем нет никаких данных о том, какую из них следует выбрать. (Никто не утверждал, что закономерность должна быть простой.) Многоточие следует использовать *только тогда*, когда из контекста ясно, что именно имеется в виду.

Часто элементы множества перечисляются таким образом, что очевидно соответствие между натуральными числами и элементами множества. Например, $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$. Мы называем такие множества *последовательностями*. Последовательность можно обозначать как $a_0, a_1, a_2, \dots$. В рассмотренном выше примере $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 2^2, \dots, a_n = 2^n, \dots$. В разд. 4.4 мы изучим понятие последовательности подробнее. Пока же нам нужен только способ обозначать множества такого вида.

Некоторые важные множества

Для отдельных часто используемых множеств чисел есть специальные названия. Некоторые из этих множеств перечислены ниже.

Посмотрим, в чем заключается парадокс Рассела. Пусть x — множество всех множеств таких, которые не содержат сами себя в качестве элемента. Содержит ли x себя в качестве элемента?

Проверим: если x содержит себя в качестве элемента, то оно не входит в себя. Если же оно не содержит себя в качестве элемента, то входит в себя. В чем тут дело? Большинство современных специалистов в теории множеств полагают, что ошибка заключается в использовании второго способа. Отметим, что именно его Бертран Рассел (английский математик и философ, 1872–1970) использовал, определяя множество x. Множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве элемента, считается «слишком большим», чтобы его можно было назвать множеством. Избирая третий способ, мы избегаем таких «слишком больших» множеств.

Поскольку в этой книге мы не собираемся углубляться в аксиоматическую теорию множеств, мы не будем полностью отказываться от второго способа.

Некоторые множества

$\mathbb{N}$: множество **натуральных чисел,** или множество неотрицательных целых чисел $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.[1)]

$\mathbb{Z}$: множество **целых чисел,** или $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

$\mathbb{Q}$: множество **рациональных чисел,** или множество дробей с ненулевым знаменателем, таких, как $\frac{1}{3}$ или $\frac{2357}{9731}$.

$\mathbb{R}$: множество **действительных чисел**, или множество чисел, которые можно записать в виде десятичной дроби, таких, как $\pi = 3.14159\ldots$, -2.715, или $2.35353535\ldots$.

$\varnothing$: **пустое множество,** или множество $\{\,\}$, в котором нет никаких элементов.

Иногда бывает удобно записывать множество квадратов натуральных чисел в виде $\{x^2 : x \in \mathbb{N}\}$ вместо $\{x : x \in \mathbb{N}$ и для некоторого $k \in \mathbb{N}, x = k^2\}$.

1.1.2. Принадлежность множеству

Чтобы доказать, что некоторый элемент принадлежит некоторому множеству, нужно доказать, что этот элемент обладает свойством, определяющим принадлежность множеству. Например, мы можем задать свойство «быть простым числом», не зная ни одного простого числа. После этого для проверки простоты некоторого числа мы будем выяснять, обладает ли оно этим определяющим свойством. Но прежде чем ввести определение простого числа, мы должны выяснить, что такое *делитель*. Мы говорим, что целое число m называется делителем целого числа n (обозначается $m|n$), если существует натуральное число k такое, что $n = m \cdot k$. Натуральное число p называется простым, если $p \neq 1$ и у него имеется только два делителя — 1 и p. Пусть $P = \{n : n \in \mathbb{N}$ и n является простым числом$\}$. В примере 1 мы покажем, что множество P непусто.

Пример 1. Докажите, что 3 — простое число; иначе говоря, что $3 \in P$.

Решение. Нам нужно показать, что число 3 обладает тем свойством, что у него есть только два делителя — 1 и 3. Кроме этих двух есть только один кандидат в делители — число 2. Но 2 не делит 3, значит, 3 — простое число. ■

Делитель целого числа еще называют **множителем**.

1.1.3. Равенство множеств

Если мы хотим, чтобы смысл каждого утверждения в математике всеми понимался одинаково, очень важно использовать точную терминологию. Например, что имеют в виду, когда говорят, что два множества равны?

Определение 1. Пусть A и B — два множества. Тогда $A = B$ или A **равно** B, если элементы множеств A и B одинаковы.

[1)] В отечественной традиции под множеством $\mathbb{N}$ принято понимать совокупность $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ *положительных* целых чисел. — *Прим. ред.*

Слово *если* приобретает особое значение, когда его употребляют в определениях. В определении 1 сказано, что $A = B$, если у множеств A и B одинаковые элементы. Поскольку в определении фигурирует слово *если*, мы считаем, что $A \neq B$, как только условие не выполняется. Таким образом, «$A = B$» — просто сокращенная запись для утверждения «элементы множеств A и B одинаковы».

Пример 2.
(a) $\{n \in \mathbb{Z}\colon n^2 - n - 2 = 0\} = \{n \in \mathbb{Z}\colon (n-2)(n+1) = 0\} = \{2, -1\}$.
(b) $\{n \in \mathbb{N}\colon n^2 - n - 2 = 0\} = \{2\}$, поскольку $-1 \notin \mathbb{N}$.
(c) $\{x \in \mathbb{N}\colon (x+1)^2 - (x-1)^2 - 4x = 0\} = \mathbb{N}$, поскольку

$$\begin{aligned}(x+1)^2 - (x-1)^2 - 4x &= x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 - 4x \\ &= 0\end{aligned}$$

— **алгебраическое тождество** (выполняется для всех x).

Пустое множество $\varnothing$ можно описать по-разному; например,

$\{x \in \mathbb{N}\colon x < x\}$;
множество материков к югу от Антарктики;
множество круглых квадратов.

Почему множество $\{x \in \mathbb{N}\colon x < x\}$ равно множеству круглых квадратов? Мы знаем, что если два множества равны, их элементы должны быть одинаковыми. Значит, если

$$\{x \in \mathbb{N}\colon x < x\} \neq \text{ множество круглых квадратов,}$$

то в одном из множеств найдется элемент, которого нет в другом множестве. А такого не может быть, так как ни в одном из этих множеств элементов нет вовсе.

1.1.4. Конечные и бесконечные множества

Некоторые множества, такие, как $\{0, 1, 2, 3\}$, обладают тем свойством, что их элементы можно перечислить, и процесс перечисления будет закончен. Мы можем описать это условие несколько более формально: либо в этом множестве нет элементов, либо его элементы могут быть поставлены в соответствие элементам некоторого подмножества $\{1, 2, \ldots, n\}$ множества натуральных чисел. Такие множества называются **конечными.** Так, множество {Ливерпуль, Лондон, Лос-Анджелес} конечно; иначе говоря, его элементы можно пронумеровать:

1 (Ливерпуль), 2 (Лондон) и 3 (Лос-Анджелес).

В пустом множестве $\varnothing$ нуль элементов, значит, оно тоже конечно.

Некоторые множества являются **бесконечными** или **не конечными множествами,** например, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{N}$. Ни для какого фиксированного n невозможно пронумеровать все элементы $\mathbb{Z}$ элементами множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

1.1.5. Соотношения между множествами

Еще одно важное соотношение между множествами возникает тогда, когда все элементы одного множества являются элементами другого.

Определение 2. Пусть A и B — два множества. Множество A является **подмножеством** множества B (пишут $A \subseteq B$), если каждый элемент A является также элементом B. Множество A — **собственное подмножество** множества B (пишут $A \subset B$), если $A \subseteq B$, но $A \neq B$.

Отношение «не являться подмножеством» обозначается $\nsubseteq$, а «не являться собственным подмножеством» обозначается $\not\subset$. Например, $\{1,2,3\} \nsubseteq \{1,3,4\}$, поскольку $2 \in \{1,2,3\}$ и $2 \notin \{1,3,4\}$. Аналогично, $\{1,4\} \not\subset \{1,2,3\}$, так как $4 \in \{1,4\}$ и $4 \notin \{1,2,3\}$. Кроме того, $\{1,2,3,2,1\} \subseteq \{1,2,3\}$, но $\{1,2,3,2,1\} \not\subset \{1,2,3\}$.

Теперь мы сформулируем два утверждения, которые непосредственно следуют из определения.

Теорема 1. Пусть A — множество. Тогда

(a) $A \subseteq A$;
(b) $\varnothing \subseteq A$.

Доказательство.
(a) В соответствии с определением 2 утверждение $A \subseteq A$, означает, что каждый элемент множества A является элементом A, а это очевидно.
(b) Утверждение «для любого элемента x, если $x \in \varnothing$, то $x \in A$» не может быть ложным, поскольку в $\varnothing$ элементов нет. В таком случае мы говорим, что утверждение **тривиально**. ■

В конце доказательств теорем или в конце решений примеров в качестве разделителя мы помещаем квадратик. В некоторых случаях, когда в примеры входят обсуждения, мы используем этот значок, чтобы отделять пример от дальнейшего текста.

При доказательстве утверждения «одно множество является подмножеством другого» основная идея заключается в том, чтобы доказать, что каждый элемент первого множества является элементом второго. Было бы неудобно, если для каждого элемента первого множества требовалось бы отдельное доказательство его вхождения во второе множество. В примере 3 приведено доказательство того, что каждый элемент первого множества является элементом второго. При этом утверждение доказывается для совершенно произвольного элемента первого множества. Совершенно произвольный элемент в доказательстве — это элемент, никакие свойства которого, кроме свойства «входить в первое множество», не используются. «Произвольный элемент множества» — это (гипотетический) элемент, *единственное* свойство которого заключается в том, что он принадлежит множеству. В математике выражение «пусть $x \in A$» означает «обозначим через x произвольный элемент множества A». Предположение о том, что мы рассматриваем совершенно произвольный элемент, позволяет нам доказать принадлежность каждого элемента множеству в один прием.

Пример 3. Докажите, что множества $A = \{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots\}$ и $B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ удовлетворяют соотношению $A \subseteq B$.

Решение. Произвольный элемент множества A имеет вид 2^i для некоторого $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Произвольный элемент множества B имеет вид $2 \cdot j$ для некоторого $j \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Очевидно, что $2^i = 2 \cdot j$, если $j = 2^{i-1}$. Поскольку произвольный элемент множества A является элементом множества B, мы делаем вывод, что $A \subseteq B$. ■

Тогда и только тогда, когда

Многие теоремы математики, а также другие математические утверждения о том, как связаны друг с другом некоторые факты, являются **импликациями.** Например, «если пьешь морковный сок, будешь строен и высок», или «если Салли в лаборатории, то она проводит химический эксперимент», или «если $x > 1$, то $x^2 > x$» — это все импликации. В импликации исходят из посылки, которая считается истинной, а затем различными методами доказывают следствие. Импликацию обозначают $a \Rightarrow b$, где a — посылка, а b — следствие. В стандартном математическом выражении **тогда и только тогда, когда** используются две импликации. Утверждение

$$a \text{ тогда и только тогда, когда } b$$

означает, что *если* a истинно, *то* b истинно ($a \Rightarrow b$), и что *если* b истинно, *то* a истинно ($b \Rightarrow a$). Это утверждение эквивалентно тому, что a и b либо оба истинны, либо оба ложны.

При доказательстве утверждения вида *тогда и только тогда, когда* доказательство высказывания «если a, то b» обычно обозначают ($\Rightarrow$), а доказательство «если b, то a» обычно обозначают ($\Leftarrow$). Утверждение вида «тогда и только тогда, когда» часто обозначают символом $\Leftrightarrow$. Обозначения в виде стрелок использованы в теореме 2.

Теорема 2. Пусть A и B — два множества. Тогда $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

(В чем заключается доказательство) Мы должны доказать два утверждения. Во-первых, что из $A = B$ следует $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Во-вторых, что если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то $A = B$.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Докажем, что если $A = B$, то $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Предположим, что $A = B$. Тогда $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$ по теореме 1.

($\Leftarrow$) Докажем, что если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то $A = B$. Для этого предположим, что $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Тогда для любого x, если $x \in A$, то $x \in B$, поскольку $A \subseteq B$. Кроме того, если $x \in B$, то $x \in A$, так как $B \subseteq A$. Значит, у множеств A и B одинаковые элементы. Согласно определению 1 выполняется соотношение $A = B$. ■

1.1.6. Диаграммы Венна

При обсуждении многих вопросов интерес представляют только элементы и подмножества некоторого выделенного множества. Например, в элементарной арифметике, как правило, ограничиваются элементами и подмножествами $\mathbb{Z}$ (множества целых чисел) или $\mathbb{Q}$ (множества рациональных чисел). Изучая некоторый период истории, рассматривают множество всех людей, живших в то время. В программировании может представлять интерес множество всех имен файлов на жестком диске. Такие множества называются **универсальными множествами,** или **генеральными совокупностями.** Они становятся «универсумом рассуждения» в конкретной ситуации.

Для иллюстрации теоретико-множественных соотношений очень удобно пользоваться диаграммами особого вида, которые называются **диаграммами Венна**. Начнем с того, что изобразим прямоугольник. Условимся, что точки этого прямоугольника представляют собой элементы универсального множества, как показано на рис. 1.1.

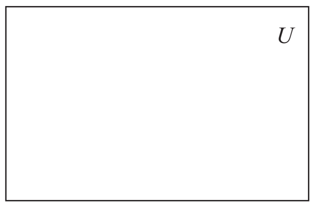


Рис. 1.1
Диаграмма Венна универсального множества U

Подмножества универсального множества изображают кругами или овалами в этом прямоугольнике, как показано на рис. 1.2. Пускай, например,

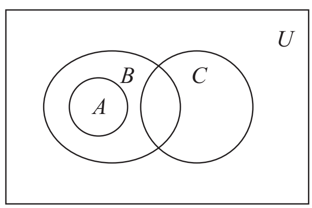


Рис. 1.2
Пример диаграммы Венна

A, B и C — подмножества универсального множества U. Область внутри круга, соответствующего множеству A, изображает элементы этого множества. Аналогичные описания можно дать для B и C. На рис. 1.2 изображены множества A, B и C, причем $A \subset B$, у множеств A и C нет общих элементов, а у множеств B и C общие элементы есть, но ни одно из этих двух множеств не является подмножеством другого.

Диаграммы Венна часто используются для того, чтобы сделать доказательства интуитивно ясными. Эти диаграммы содержат самую общую информацию о множествах и отображают соотношения между множествами особенно наглядно. Хорошая диаграмма Венна может быть очень полезной, но *сама по себе доказательством не является*. Ошибка, допущенная при построении диаграммы Венна, может навести на мысль, что некоторое свойство выполняется, тогда как на самом деле оно может и не выполняться. В некоторых особенно сложных случаях бывает очень трудно разобраться — правильный рисунок или нет.

Кроме того, картинка может быть неоднозначной. Например, судя по рис. 1.2, можно предположить, что в множестве B имеются такие элементы, которые не входят ни в A, ни в C. Может быть, это так, а может быть и нет. Тем не менее *хорошая* диаграмма Венна ценна тем, что позволяет сделать предположение об истинности некоторого утверждения, а также поясняет доказательство и делает его особенно наглядным.

[...]

Алгоритмы
Квадратный корень I
Квадратный корень II
Точные квадраты

Шаблон
Шаблон 1.12. Использование принципа математической индукции

Справочные материалы к разд. 1.10

Термины
База индукции
базовые случаи
явный вид члена последовательности
индуктивное предположение
простые числа
рекурсивно определенная последовательность
рекурсивный вызов
рекурсия
шаг индукции

Теоремы
Основная теорема арифметики
Сильная форма принципа математической индукции

Алгоритмы
Бинарный поиск в телефонной книге
Вычисление F_n
Вычисление степеней
Наибольший нечетный делитель
Печать разложения целого числа на множители

Шаблон
Шаблон 1.13. Использование сильной формы принципа математической индукции

1.12.2. Приступим к повторению

1. Какое из следующих описаний приводит к множеству {2, 8, 14, 20, 26, 32}?

(a) $\{n \in \mathbb{N}\colon n = 2x + 6$ для некоторого целого числа x такого, что $1 \leqslant x \leqslant 6\}$.
(b) $\{n \in \mathbb{N}\colon n = 6x + 2$ для некоторого целого числа x такого, что $1 \leqslant x \leqslant 6\}$.
(c) $\{n \in \mathbb{N}\colon n = 6x + 2$ для некоторого целого числа x такого, что $0 \leqslant x < 6\}$.
(d) Ни одно из перечисленных.

2. Положим $B = \{2, 3, 6, 9, 11\}$ и $C = \{1, 4, 6, 11, 15\}$. Какое из следующих множеств не совпадает ни с одним из множеств $B \cup C$, $B \cap C$ и $B - C$?

(a) $\{1, 6, 9, 15\}$. (b) $\{6, 11\}$. (c) $\{2, 3, 9\}$. (d) Ни одно из перечисленных.

3. Сформулируйте контрапозицию утверждения «Если солнце светит, то пора отправляться на прогулку».

(a) Если солнце светит, то не пора отправляться на прогулку.
(b) Если пора отправляться на прогулку, то солнце светит.
(c) Если не пора отправляться на прогулку, то солнце не светит.
(d) Ни одно из перечисленных.

4. Среди 26 студентов некоторые специализируются в биологии, некоторые — девушки, и других нет. Девушек 17, а в биологии специализируются 23. Сколько девушек специализируются в биологии?

(a) 12. (b) 17. (c) 14. (d) 9.

5. Опишите каждое из следующих множеств в виде $\{x\colon$ свойство элемента $x\}$.

(a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$.
(b) $B = \{1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, \ldots\}$.
(c) $C = \{1, 5, 9, 13, 17, 21, \ldots\}$.
(d) $D = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots\}$.
(e) $E = \{$лимон, лайм$, 1, 3, 5, 7, \ldots\}$.

6. Пусть $U = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ и $D = \{2, 4, 6, 8\}$. Найдите элементы каждого из следующих множеств.

(a) $(A \cup B) \cap C$. (b) $A \cup (B \cap C)$. (c) $\overline{C} \cup \overline{D}$.

(d) $\overline{C \cap D}$. (e) $(A \cup B) - C$. (f) $A \cup (B - C)$.

(g) $(B - C) - D$. (h) $B - (C - D)$. (i) $(A \cup B) - (C \cap D)$.

7. Перечислите подмножества каждого из следующих множеств.

(a) $A = \{1, 2, 3\}$. (b) $B = \{1, \{2, 3\}\}$. (c) $C = \{\{1, 2, 3\}\}$.

8. Приведите контрпример к утверждению $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = A$.

9. Перечислите первые восемь членов последовательности, заданной по формулам $c_0 = 1, c_1 = 3$ и $c_n = c_{n-1} + 2c_{n-2}$ при $n \geqslant 2$.

10. Пусть A — подмножество некоторого универсального множества U. Если A содержит 58 элементов и $\overline{A}$ содержит 37 элементов, то сколько элементов содержится в U?

1.12.3. Вопросы для повторения

1. Пусть $A = \{1, 2, 4, 7, 8\}$, $B = \{1, 4, 5, 7, 9\}$ и $C = \{3, 7, 8, 9\}$. Пусть $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Используя эти множества и операции объединения, пересечения, абсолютной и относительной разностей, найдите выражения для следующих множеств:

(a) $\{2, 7, 9\}$;

(b) $\{3, 5, 6, 7, 9, 10\}$.

2. Был проведен опрос читательских предпочтений граждан Луисбурга. Пусть множество U — выборка взрослых граждан Луисбурга, F — множество женщин в этой выборке, B — множество читателей, прочитавших пять или более книг (назовем их регулярно читающими книги), а P — множество читателей, прочитавших все выпуски некоторого периодического издания в прошлом году (их назовем регулярно читающими периодику). Воспользуйтесь теоретико-множественными обозначениями, чтобы задать следующие множества читателей:

(a) женщины, регулярно читающие книги или периодику;

(b) мужчины, регулярно читающие и книги, и периодику;

(c) взрослые, регулярно читающие либо книги, либо периодику, но не то и другое вместе;

(d) женщины, которые не читают регулярно ни книги, ни периодику;

(e) мужчины, которые регулярно читают книги, но не читают периодику.

Теперь опишите словами следующие множества:

(f) $\overline{F} \cap P$; (g) $F \cap \overline{B} \cap P$; (h) $F \cap B \cap P$;

(i) $\overline{F} \cap \overline{B} \cap \overline{P}$; (j) $F \cap (P \cup B) - F \cap (P \cap B)$.

3. Для множеств A и B докажите, что $A \cup (B - A) = A \cup B$.

4. Для множеств A и B докажите, что $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B}$.

5. По индукции докажите, что $3 + 11 + \cdots + (8n - 5) = 4n^2 - n$ при $n \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant 1$.

6. По индукции докажите, что $2n + 1 < 3n - 1$ при $n \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant 3$.

7. Докажите, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ число $n^3 + n$ четно.

8. По индукции докажите, что $73 | (8^{n+2} + 9^{2n+1})$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

9. Докажите, что $b_n = 5 \cdot 2^n + 1$ — явный вид члена последовательности, заданной рекурсивно: $a_0 = 6, a_1 = 11$ и $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ при $n \geqslant 2$.

10. Предположим, что $S \subseteq \mathbb{N}$ и $3 \in S$. Кроме того, предположим, что если $x \in S$, то $x + 3 \in S$. Докажите, что

$$\{3 \cdot n \colon n \in \mathbb{N}\} \subseteq S.$$

11. В стране Анчугрии в обращении есть монеты достоинством только 3 чугрика и 5 чугриков. Если некоторую сумму нельзя уплатить этими монетами, то товары

$[\ldots]$

4. Сумма, приведенная ниже, возникает при вычислении количества операций, которые требуются одному методу, **сортировке деревом**, чтобы упорядочить список чисел по возрастанию. Более точно, сортировку деревом часто строят с предварительным шагом, называемым *heapify* (создание кучи).(*Предварительный* означает, что этот шаг выполняется однажды перед основным шагом программы.) Приведенная сумма выражает число операций, нужных для того, чтобы «собрать в кучу» список из 2^n чисел:
$$0 \cdot 2^n + 1 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-2} + 3 \cdot 2^{n-3} + \cdots + (n-1) \cdot 2^1 + n \cdot 2^0 = 2^{n+1} - n - 2.$$
По индукции докажите корректность суммирования при $n \geqslant 0$.
5. Индукцией по n покажите, что для $b \in \mathbb{N}$, $b \geqslant 2$ справедливо тождество[1)]
$$(b-1) \cdot \sum_{i=0}^{n} b^i = b^{n+1} - 1.$$
Рассмотрите это тождество в контексте представления чисел в системе счисления с основанием b, используя обыкновенную позиционную систему счисления. Для начала разберитесь, что означает это тождество при $b = 10$ и $n = 4$.
6. (a) Сколько копий алгоритма *ВозведВСтепень* используется при вычислении $\textit{основание}^{\textit{показатель}}$?
   (b) Покажите, что если алгоритм *ВозведВСтепень* используется n раз (т. е. имеется всего n вызовов, включая и первоначальный, и рекурсивные вызовы), то число выполненных умножений заключается между 0 и $2n$.
   (c) В более простом алгоритме вычисления 1.001^{1000} нужно перемножать 1000 копий числа 1.001, всего 999 умножений. Пользуясь пунктами (a) и (b), оцените, насколько меньше умножений требуется алгоритму *ВозведВСтепень*.
7. Пусть X и Y — два списка, упорядоченные по неубыванию. В предположении, что общее число элементов в этих двух списках равно n ($n > 0$), докажите, что X и Y можно слить в один список из n чисел, расположенных в порядке неубывания, не более, чем за $n - 1$ сравнений.
8. Докажите корректность следующего кода вычисления чисел Фибоначчи:

Алгоритм: Вычисление F_n

вход: $n \in \mathbb{N}$
выход: F_n
Фибоначчи(n)
if $n = 0$ then
    Фибоначчи$(0) = 1$
else
    if $n = 1$ then
        Фибоначчи$(1) = 1$
    else
        Фибоначчи(n) = *Фибоначчи*$(n-1)$ + *Фибоначчи*$(n-2)$

9. Докажите, что для отыскания определенного числа в списке из 2^n чисел, расположенных в неубывающем порядке, требуется не более $n + 1$ сравнений.
10. Докажите, что для вычисления произведения n различных действительных чисел, входящих в выражение со скобками, независимо от порядка скобок нужно ровно $n - 1$ умножений.

[1)] Оно справедливо и для любого $b \in \mathbb{R}$, если положить по определению $b^0 = 1$. — *Прим. ред.*

[. . .]