

А. С. Иванов

Конструирование машин.

Развитие основ

1. Прочность, жесткость, надежность

УДК 62-1
ББК 34.4; 30г
И20

Рецензенты: заведующий кафедрой «Машиноведение и основы конструирования» СПбПУ Петра Великого, доктор технических наук *М. А. Скотникова*;
доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная физика» ТвГУ *В. В. Измайлов*

Иванов, А. С.

И20 Конструирование машин. Развитие основ. Прочность, жесткость, надежность: учеб. пособие для вузов / А. С. Иванов. — СПб.: Политехника, 2021. — 238 с. : ил.

DOI: 10.25960/7325-1184-0

ISBN 978-5-7325-1184-0

Развиваются опубликованные автором в 2020 г. издательством «Политехника» истоки основ конструирования машин в направлениях: 1) расчета прочности деталей машин в статистическом аспекте, где излагается теория двухпараметрического подобия усталостного разрушения, отличающаяся некоторыми положительными качествами от известной теории С. В. Серенсена — В. П. Когаева; 2) расчетов нормальной и касательной контактной жесткости стыков, развивающих идеи Н. В. Демкина, З. М. Левиной и Д. Н. Решетова, а также применения этих расчетов к уточненным расчетам термической проводимости стыка, резьбовых соединений и соединений с натягом; 3) расчета на надежность, контроля и обеспечения надежности машин, согласующихся с подходами академика Н. Д. Кузнецова.

Книга будет полезна расчетчикам и конструкторам машин, а также специалистам по доводке разработанных конструкций к их серийному производству и выходу с ними на международный рынок. Она может быть полезна инженерам-конструкторам, инженерам-расчетчикам, специалистам в области машиностроения, аспирантам, преподавателям технических вузов и студентам.

УДК 62-1
ББК 34.4; 30г

© А. С. Иванов, 2021

© Редакционно-издательская
подготовка, оригинал-макет.

DOI: 10.25960/7325-1184-0

ISBN 978-5-7325-1184-0

Издательство «Политехника», 2021

Предисловие

Как известно, для освоения курса «Основы конструирования машин» в техническом вузе отводятся два семестра. Один из них посвящен лекциям и семинарам, а второй — курсовому проекту. Полагаю, что конструированию машин сложно качественно обучить студентов в течение выделенного времени обучения, так как обучение конструированию — это сложный разноплановый процесс. Конструктору при конструировании необходимо одновременно применять как знания по классическим дисциплинам (математике, физике, химии, теоретической механике, теории механизмов и машин, взаимозаменяемости и техническим измерениям, материаловедению, сопротивлению материалов, деталям машин), которые при обучении должны сформироваться в непротиворечивую целостность, так и обобщенный опыт по тенденциям развития конструкций и расчета современных машин и их деталей.

Чтобы не отставать в модернизации промышленности от передовых зарубежных стран, необходимо как развивать производственную базу машиностроения, так и улучшать обучение студентов технических вузов конструированию машин. Последнего, по мнению автора, можно достигнуть, перейдя на трехмодульное обучение конструированию.

Первый модуль, который назван «Истоки основ конструирования машин», следует излагать школьникам старших классов и студентам первого или второго года обучения в вузе. Полагаю, что материал книги «Конструирование машин. Истоки основ», опубликованной издательством «Политехника» в 2020 г., может служить первым модулем. Преподавателями вузов замечено, что при расчетах прочности конструируемой машины студенты путаются в составлении условия равновесия детали, узла и машины в целом. Указанный недостаток возникает из-за плохого усвоения закона равновесия рычага, который все начинают изучать еще в школе, и недостаточного умения его применять на практике. В этой книге существенное внимание уделено указанному вопросу и приведены начальные сведения, необходимые для конструирования машин, излагаемые обычно в курсах теоретической механики, сопротивления материалов, взаимозаменяемости и материаловедения. Материал изложен в доступной и интересной для широкого круга читателей форме.

Вторым модулем, названным «Основы конструирования машин», может служить несколько скорректированный материал традиционного курса «Детали машин», читаемого в вузе. Коррекция изучаемого материала нужна по следующей причине. В традиционном курсе излагаются, как правило, проектные, а не проверочные расчеты деталей. Проектные расчеты, излагаемые в разделах курса, таких как зубчатые и шариково-винтовые передачи, вариаторы, обгонные муфты [55, 101], в сравнении

с проверочными отличаются повышенной сложностью формул, использованием эмпирических коэффициентов и графиков, приспособленностью только к расчету установившегося конструктивного исполнения деталей (например, по ним можно рассчитать зубчатую эвольвентную передачу для случая, если угол наклона зуба косозубых колес не превышает 22° , но нельзя, если угол наклона зуба $22\dots35^\circ$, хотя за рубежом выпускают редукторы с таким углом наклона зубьев). Изложение таких расчетов преподавателем на лекциях и освоение их студентами требует много времени. Поэтому в настоящее время при широком использовании компьютерной техники вместо проектных расчетов деталей целесообразно для достижения поставленной цели многократно повторять проверочные, меняя исходные данные расчетов, а потому умение выполнять проверочные расчеты следует считать достаточным для конструктора. Время, освободившееся на изучение дисциплины, лучше использовать для выполнения студентами более сложных курсовых проектов современной тематики.

Третий модуль, названный «Развитие основ конструирования машин», предполагает углубленное освоение конструирования машин и может излагаться в магистратуре машиностроительных специальностей вузов.

Материал предлагаемой книги «Конструирование машин. Развитие основ. 1. Прочность, жесткость, надежность» служит частью третьего модуля. Книга посвящена направлениям: 1) расчету прочности деталей машин в статистическом аспекте, где развивается предлагаемая теория двухпараметрического подобия усталостного разрушения, отличающаяся некоторыми положительными качествами от известной теории С. В. Серенсена — В. П. Когаева; 2) расчетам нормальной и касательной контактной жесткости стыков, развивающим идеи Н. В. Демкина, З. М. Левиной и Д. Н. Решетова, а также применению этих расчетов к уточненным расчетам термической проводимости стыка, резьбовых соединений и соединений с натягом; 3) расчету на надежность, контролю и обеспечению надежности машин, согласующимися с подходами академика Н. Д. Кузнецова.

Материалом остальных частей третьего модуля предполагаются книги «Конструирование машин. Развитие основ. 2. Современные передачи и подшипники» и «Конструирование машин. Развитие основ. 3. Современные конструктивные решения деталей, узлов и машин», подготавливаемые к изданию на основе анализа и обобщения отечественного и зарубежного опыта.

Третий модуль не обязательно делать предлагаемого исполнения. Технические вузов в стране много, и во многих из них накоплен опыт по разработке машин, конкурентоспособных на мировом рынке. Обобщение этого опыта могло бы быть также материалом третьего модуля. Главное, что от года к году следует суммировать в книгах положительный опыт, накопленный по конструированию в отдельных отраслях промышленности и организациях.

Глава 1

РАЗВИТИЕ РАСЧЕТОВ ПРОЧНОСТИ В СТАТИСТИЧЕСКОМ АСПЕКТЕ

В книге «Конструирование машин. Истоки основ» [42] были рассмотрены основы прочностных расчетов. В первой главе развиваются эти основы с привлечением вероятностных представлений о прочности деталей.

1.1. Статистические теории прочности

Статистические теории прочности, как известно, начали разрабатывать в конце 1930-х годов. Было замечено, что прочность хрупких материалов, а также сопротивление усталости металлов уменьшаются с увеличением размера детали.

В теории наиболее слабого звена В. Вейбулла (1938) несущая способность элементарных объемов по объему детали считалась распределенной по закону Вейбулла. В теории Т. А. Конторовой и Я. И. Френкеля (1941) [67] это распределение принято нормальным. В теории Н. Н. Афанасьева (1943), позволившей характеризовать влияние конструктивных факторов, предполагалось существенным рассеяние несущей способности элементарных объемов по сечению детали и пренебрежимым, в связи с обычно волокнистой структурой материала детали, по длине. В 1960-е – 70-е годы была предложена теория подобия усталостного разрушения С. В. Серенсена — В. П. Когаева [62, 63, 112, 113], развивающая статистические теории прочности В. Вейбулла и Н. Н. Афанасьева.

1.2. Функции и плотности распределения случайной величины

В теории вероятностей для описания распределения случайной величины X пользуются функцией $F(x)$ и плотностью $f(x)$ распределения этой величины. Функция $F(x)$ характеризует вероят-

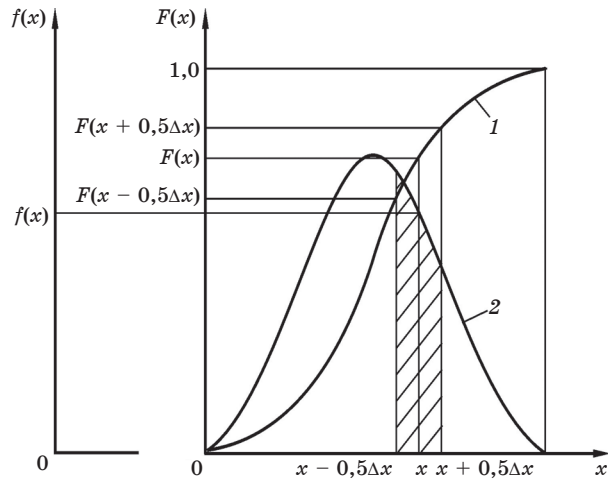


Рис. 1.1. Распределение случайной величины X :
1 — функция $F(x)$; 2 — плотность $f(x)$

ность события, заключающегося в том, что случайная величина X будет меньше текущей переменной x . Это возрастающая функция с пределами изменения от 0 до 1 (рис. 1.1, кривая 1). Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X оценивается отношением вероятности попадания случайной величины X на малый участок Δx к длине этого участка (рис. 1.1, кривая 2):

$$f(x) = F[x < X \leq (x + \Delta x)] / \Delta x = [F(x + \Delta x) - F(x)] / \Delta x.$$

Заштрихованная площадь под кривой 2 численно равна вероятности $F[x < X \leq (x + \Delta x)]$ попадания случайной величины X на интервал Δx . Эта вероятность еще может быть представлена как разность значений $F(x + \Delta x)$ и $F(x)$. Вся площадь под кривой $f(x)$ равна 1.

В теории надежности для описания функций распределения: наработки до отказа, размеров детали, климатических факторов и т. д. чаще всего используют *нормальное, логарифмически нормальное, Вейбулла и экспоненциальное теоретические распределения* случайной величины X . Плотности и функции этих распределений изображены на рис. 1.2.

Нормальное распределение. Если случайная величина представляет собой сумму большого числа независимых или слабо зависимых величин и при этом ни одно из них не доминирует над другими, то распределение этой случайной величины близко к нормальному. Такому распределению подчиняются: рассеяние размеров деталей, разброс климатических факторов (окружающая

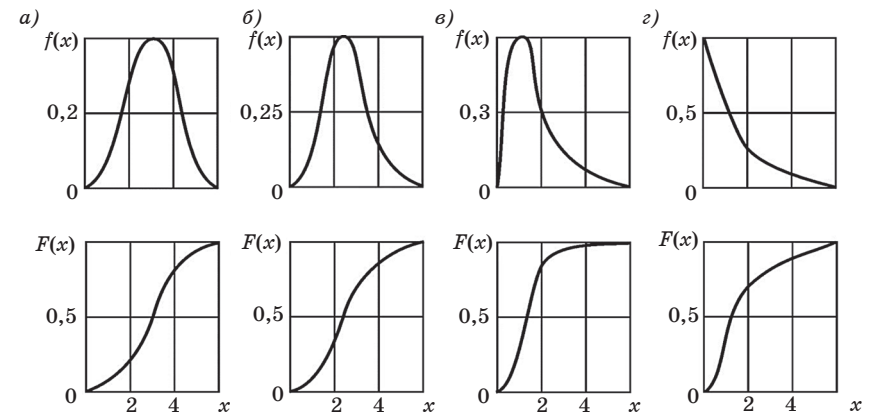


Рис. 1.2. Плотность и функция распределения: а — нормального при $S = 1$; б — логарифмически нормального при $(\lg x)_0 = 0,4$ и $S_{\lg x} = 0,13$; в — Вейбулла при $M = 2$, $x_0 = 2$; г — экспоненциального при $\lambda = 1$

температура, влажность и т. д.). Этим распределением хорошо описываются результаты испытаний на износ.

Плотность вероятности случайной величины X в этом случае имеет вид

$$f(x) = \frac{e^{-(x-x_0)^2 / (2S^2)}}{S\sqrt{2\pi}}, \quad (1.1)$$

где x_0 и S — математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

Для того чтобы получить функцию $F(x)$ нормального распределения, пользуются таблицами. Значения функции зависят от двух параметров: x_0 и S . Поэтому таблицы получаются громоздкими. Можно обойтись короткими таблицами, если рассматривать функцию нормального распределения, у которой математическое ожидание 0, а среднее квадратическое отклонение 1. Для этого распределения плотность

$$f_0(u_p) = \frac{e^{-u_p^2 / 2}}{\sqrt{2\pi}} \quad (1.2)$$

и функция $F_0(u_p)$ зависят от одного параметра u_p , называемого квантилью нормального распределения (рис. 1.3).

Функция нормального распределения приведена в приложении А. Чтобы от этой функции перейти к функции $F(x)$, необходимо сделать подстановку

$$u_p = \frac{x - x_0}{S}. \quad (1.3)$$

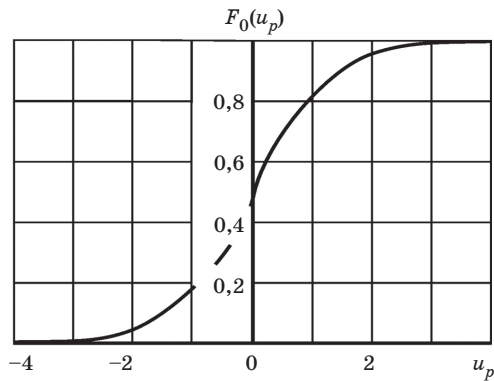


Рис. 1.3. Функция нормального распределения $F_0(u_p)$

Из формулы следует, что квантиль нормального распределения — это разность значений случайной величины и ее математического ожидания в долях среднего квадратического отклонения.

Функция $F_0(u_p)$ обладает свойствами: $F_0(-\infty) = 0$, $F_0(+\infty) = 1$, $F_0(-u_p) = 1 - F_0(u_p)$.

Заданные размеры детали не удается выдержать при изготовлении абсолютно точно. При обмере партии деталей всегда обнаруживается рассеяние их размеров. Как показывает практика, оно обычно близко нормальному распределению. На рис. 1.4 в качестве примера представлена плотность распределения размера детали. Считается, что поле допуска размера покрывает шесть средних квадратических отклонений, т. е. $6S$. Иначе, рассеяние размера X детали укладывается в поле допуска T_d с вероятностью $F_0(-3u_p < X < 3u_p) = 0,997$ согласно таблице приложения А.

Логарифмически нормальное распределение. При этом распределении логарифм случайной величины распределен по нормаль-

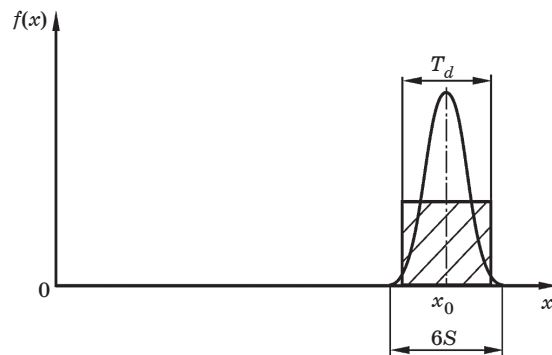


Рис. 1.4. Плотность распределения размера детали

ному закону. Достоинством такого распределения по сравнению с нормальным является возможность описания им распределения существенно положительных случайных величин, например наработки до отказа. Оно хорошо аппроксимирует результаты усталостных испытаний и рассеяние наработок до отказа, вызванного каким-либо процессом старения материала.

Логарифмически нормальным распределением можно описывать распределение случайной величины, представляющей собой произведение значительного числа исходных случайных величин, где ни одно из них не превалирует над другими.

Плотность распределения случайной величины X в этом случае имеет вид

$$f(x) = \frac{e^{-[\lg x - (\lg x)_0]^2 / (2S_{\lg x}^2)}}{2,3xS_{\lg x}\sqrt{2\pi}}, \quad (1.4)$$

где $(\lg x)_0$, $S_{\lg x}$ — математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение логарифма случайной величины X .

Функцию нормального распределения $F(\lg x)$ логарифма случайной величины X можно найти по таблице приложения А в зависимости от значения квантили

$$u_p = \frac{\lg x - (\lg x)_0}{S_{\lg x}}. \quad (1.5)$$

Распределение Вейбулла. Его наряду с логарифмически нормальным распределением используют для описания наработки до отказа по усталостным разрушениям. Им описывают распределение наработки до отказа подшипников качения, происходящего из-за усталостного выкрашивания контактирующих поверхностей.

Плотность распределения Вейбулла записывается в виде

$$f(x) = \frac{Mx^{M-1}e^{-x^M/x_0}}{x_0}, \quad (1.6)$$

где M , x_0 — параметры формы и масштаба.

Функция распределения Вейбулла описывается выражением

$$F(x) = 1 - e^{-x^M/x_0}. \quad (1.7)$$

Экспоненциальное распределение. Оно применяется для описания распределения наработки до отказа элементов радиоаппаратуры. Как показали результаты обработки статистических данных по отказам в условиях эксплуатации порталных подъемных кранов, им можно описывать распределение наработки между отказами восстанавливаемых изделий.

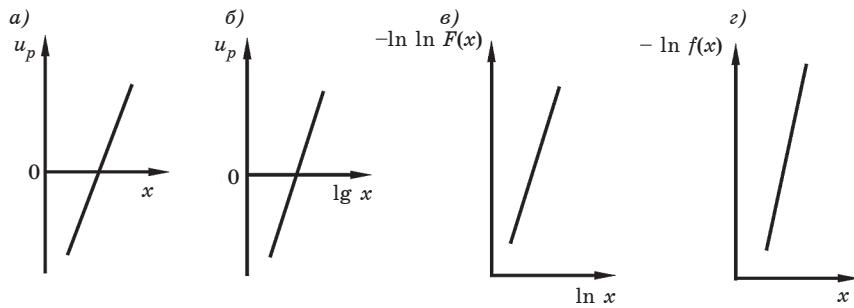


Рис. 1.5. Вероятностные бумаги для функций распределения: а — нормального; б — логарифмически нормального; в — Вейбулла; г — экспоненциального

Плотность распределения случайной величины X в этом случае имеет вид

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad (1.8)$$

где λ — параметр распределения.

Функция распределения определяется уравнением

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}. \quad (1.9)$$

Для графического представления функций распределений часто пользуются *вероятностными бумагами*, где по осям абсцисс и ординат взяты такие шкалы, которые график функции распределения представляют в виде прямой (рис. 1.5).

На вероятностных бумагах для нормального и логарифмически нормального распределений по оси абсцисс откладывают соответственно случайную величину и ее логарифм, а по оси ординат в линейном масштабе — квантиль нормального распределения (рис. 1.5, а, б). Распределение Вейбулла будет графически изображаться в виде прямой, если по оси абсцисс откладывать $\ln x$, а по оси ординат — $\ln \ln F(x)$ (рис. 1.5, в). Для экспоненциального распределения вероятностная бумага имеет полулогарифмическую шкалу (рис. 1.5, г).

1.3. Теория подобия усталостного разрушения С. В. Серенсена — В. П. Когаева

Перечисленные в разделе 1.1 статистические теории прочности опираются на два предположения: 1) несущие способности элементарных объемов детали независимы друг от друга; 2) отказ детали возникает при разрушении хотя бы одного элементарного

объема. Указанные гипотезы, как показывает практика, справедливы для повреждений усталостного характера (до появления первой микротрещины).

Для расчетной оценки закона распределения предела выносливости детали используют уравнение подобия усталостного разрушения С. В. Серенсена — В. П. Когаева [62, 63, 112, 113]. Тем самым удастся заменить испытания крупногабаритных деталей испытаниями образцов малых размеров. Теория развивает статистические теории прочности В. Вейбулла и Н. Н. Афанасьева. В качестве основного критерия подобия рассматривается отношение L/\bar{G} периметра L опасного сечения или его наиболее напряженной части к относительному градиенту $\bar{G} = \frac{1}{\sigma_{1\max}} \frac{d\sigma_1}{dx}$ первого главного

напряжения в этом сечении, где $\sigma_{1\max}$ — первое главное напряжение в наиболее напряженной части (точке) периметра опасного сечения. Величина L/\bar{G} пропорциональна напряженному объему, в котором возможно зарождение трещины. Для деталей круглого сечения при круговом изгибе и растяжении периметр одинаково напряжен и имеет длину $L = \pi d$. Для деталей прямоугольного сечения при изгибе в плоскости, например для зубьев зубчатых колес, наиболее напряженная часть периметра равна ширине зуба ($L = b$) при работе зуба одной стороной и удвоенной ширине ($L = 2b$) при двустороннем нагружении.

Для цилиндрических деталей при круговом изгибе

$$\bar{G} = \frac{2}{d}. \quad (1.10)$$

Для ступенчатого вала с диаметрами d и D и галтелью радиусом ρ на основе решения теории упругости при изгибе

$$\bar{G} = \frac{2,3}{\rho}(1 + \Psi) + \frac{2}{d}, \quad (1.11)$$

где при $D/d \geq 1,5$ $\Psi = 0$, при $D/d < 1,5$ $\Psi = \frac{1}{2} \frac{1}{2\sqrt{t/\rho} + 1}$; $t = \frac{D-d}{2}$.

Для цилиндрических образцов с глубокими гиперболическими выточками при изгибе

$$\bar{G} = \frac{2}{\rho} + \frac{2}{d}. \quad (1.12)$$

Для образцов с такими же выточками при растяжении-сжатии

$$\bar{G} = \frac{2}{\rho}. \quad (1.13)$$

Формулы, полученные из уравнения подобия этой теории, для медианного значения и коэффициента вариации предела выносливости, выраженного в максимальных напряжениях, деталей, изготовленных из материала одной плавки, имеют вид

$$\bar{\sigma}_d = \varepsilon_\infty \bar{\sigma}_{-1}(1 + l); \quad (1.14)$$

$$v_d = \frac{(1 - 10^{-2S})l}{2(1 + l)}, \quad (1.15)$$

где

$$l = \frac{1 - \varepsilon_\infty}{\varepsilon_\infty} \left(\frac{1}{88,3} \frac{L}{G} \right)^{-v_\sigma}.$$

В приведенные формулы входят четыре параметра: $\bar{\sigma}_{-1}$ — медианное значение предела выносливости гладкого образца диаметром 7,5 мм при изгибе с вращением; v_σ — эмпирический коэффициент; ε_∞ — коэффициент влияния абсолютных размеров, найденный для гладкой детали максимально большого диаметра при изгибе с вращением; S — среднее квадратическое отклонение логарифма величины $(\sigma_d - u)$, где u — минимальная граница предела выносливости. Коэффициент 88,3 равен значению $L/\bar{G} = \pi 7,5^2/2$ для гладкого образца диаметром 7,5 мм.

Значение параметра S зависит от значения ε_∞ . При $\varepsilon_\infty = 0,5$, характерном для конструкционных металлов, принимают для сталей $S = 0,045 \dots 0,05$, для алюминиевых деформируемых сплавов $S = 0,05 \dots 0,06$. Для магниевых литейных сплавов МЛ5 при $\varepsilon_\infty = 0,4$ принимают $S = 0,16$.

Формулы (1.14) и (1.15) аппроксимируют функцию распределения предела выносливости нормальным распределением, так чтобы оно совпало с исходным логарифмически нормальным распределением случайной величины $(\sigma_{\max} - u)$, полученным из первоначального закона Вейбулла, в двух точках — при квантили, равной нулю (вероятность неразрушения 50 %), и при квантили, равной минус двум (вероятность неразрушения 99,7 %). Формулы за счет подбора значений четырех параметров обеспечивают возможность точного описания закономерностей усталостных повреждений деталей разной геометрической формы при разных видах нагружения и позволяют пересчитывать законы распределения предела выносливости образцов одних размеров и форм на другие. Если известны входящие в уравнение коэффициенты, то испытания могут быть исключены полностью. Однако уравнение подобия не учитывает длину источника концентрации напряжений. Поэтому,

если деталь имеет несколько концентраторов напряжений, разнесенных по длине, то возникает неясность, как проводить оценку. Кроме того, если неизвестны входящие в уравнение коэффициенты, необходимо испытать для их определения несколько выборок образцов разных размеров.

1.4. Несущая способность цепи в вероятностном аспекте

Рассмотрим систему, состоящую из n_k одинаковых компонент, причем известно, что система выходит из строя при отказе одной любой ее компоненты, т. е. компоненты в смысле надежности системы соединены последовательно. Аналогом такой системы может служить грузовая цепь, состоящая из n_k звеньев. Пусть несущая способность звена цепи распределена по нормальному закону.

Функцией распределения $Q(R)$ несущей способности цепи F_0 является вероятность ее разрушения под действием нагрузки F_0 :

$$Q(R) = \text{Вер}(F_0 > R). \quad (1.16)$$

При выполнении условия независимости событий, согласно теореме умножения вероятностей, вероятность разрушения цепи связана с вероятностью разрушения ее звена $Q(R_k)$ зависимостью

$$Q(F_0 > R) = 1 - [1 - Q(F_0 > R_k)]^{n_k}, \quad (1.17)$$

где R_k — несущая способность звена цепи. Она соответствует распределению минимального члена выборки, состоящей из n_k звеньев, т. е. ряда n_k чисел, взятых случайным образом из нормального распределения несущей способности элементов. Эта функция отличается от нормального распределения и тем существеннее, чем больше n_k . Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение уменьшаются с увеличением n_k (рис. 1.6).

В теории экстремальных распределений (раздел теории вероятностей, занимающийся распределениями крайних членов выборок) доказано, что рассматриваемое распределение с ростом n_k стремится к двойному экспоненциальному и функция распределения имеет вид

$$Q(F_0 > R) = 1 - e^{-e^{R-\delta/\theta}}.$$

Здесь δ и θ ($\theta > 0$) — параметры распределения. При реальных (малых и средних) значениях n_k двойное экспоненциальное распределение непригодно для использования в инженерной практике из-за существенных погрешностей расчета.

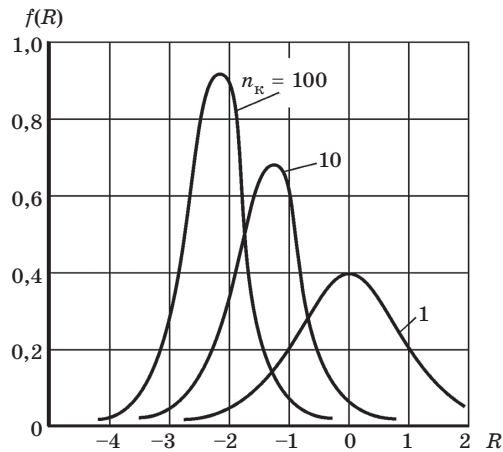


Рис. 1.6. Плотности распределения несущей способности цепи в зависимости от числа составляющих ее звеньев

Аппроксимируем распределение несущей способности цепи нормальным распределением так, чтобы оно совпало с реальным распределением как в средней части, так и в области левого хвоста плотности распределения несущей способности цепи, так как именно эта область распределения определяет ее вероятность безотказной работы. Поэтому при определении параметров аппроксимирующего распределения выдвигаем условия равенства функций аппроксимирующего и реального распределений при медианном значении и значении несущей способности цепи, соответствующему ее вероятности безотказной работы.

Вероятность безотказной работы системы находят после аппроксимации по квантили нормального распределения, представляющей собой разность двух нормально распределенных случайных величин — несущей способности системы и нагрузки на нее (подробнее см. раздел 7.3).

Пусть распределения несущей способности звеньев R_k и нагрузки на цепь F описываются нормальными распределениями с математическими ожиданиями соответственно m_{Rk} и m_F и средними квадратическими отклонениями S_{Rk} и S_F . Тогда, учитывая, что значения математических ожиданий и средних квадратических отклонений несущей способности ниже у цепи, чем у звеньев, можно предложить простейшие выражения для математического ожидания m_R и среднего квадратического отклонения S_R нормального распределения, аппроксимирующего распределение несущей способности цепи:

$$m_R = m_{Rk} - \mu S_{Rk}; \quad (1.18)$$

$$S_R = \varepsilon S_{Rk}. \quad (1.19)$$

Здесь μ и ε — некоторые коэффициенты ($\mu > 0$; $0 < \varepsilon \leq 1$), зависящие от n_k , а ε — также от u_p . Назовем величину μ параметром положения, а величину ε — параметром рассеяния. Значения μ и ε приведены на рис 1.7 [105].

Разность несущей способности цепи и нагрузки на нее описывается нормальным распределением с математическим ожиданием $m_R - m_F$ и средним квадратическим отклонением $S = (S_R^2 - S_F^2)^{1/2}$. Так как квантиль нормального закона распределения u_p , характеризующая вероятность безотказной работы цепи $P(F_0 \leq R)$, связана с параметрами этого закона формулой $m_R - m_F + u_p S = 0$, получаем

$$u_p = -\frac{m_R - m_F}{\sqrt{S_R^2 + S_F^2}} = -\frac{m_{Rk} - \mu S_{Rk} - m_F}{\sqrt{(\varepsilon S_{Rk})^2 + S_F^2}}. \quad (1.20)$$

Вместо средних квадратических отклонений S_{Rk} , S_R , S_F можно рассматривать соответствующие коэффициенты вариации $v_{Rk} = S_{Rk}/m_{Rk}$; $v_R = S_R/m_R$; $v_F = S_F/m_F$, а математические ожидания выразить через запасы прочности по средним значениям $n_{cp} = m_{Rk}/m_F$. Тогда формулы примут вид:

$$m_R = m_{Rk} (1 - \mu v_{Rk}); \quad (1.21)$$

$$v_R = \frac{\varepsilon v_{Rk}}{1 - \mu v_{Rk}}; \quad (1.22)$$

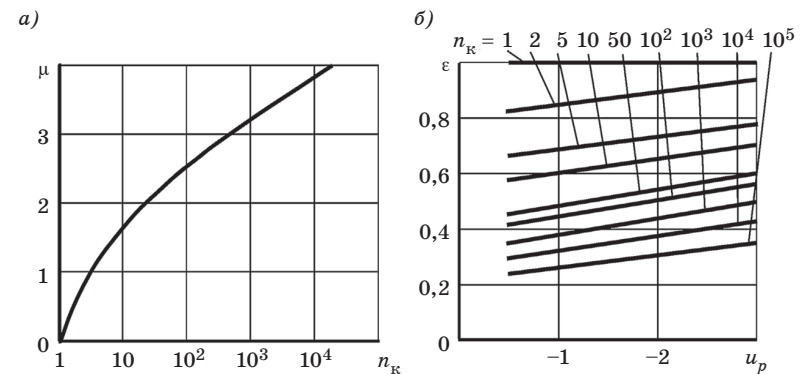


Рис. 1.7. Параметры распределения несущей способности цепи: а — положения; б — рассеяния

$$u_P = -\frac{n_{cp}(1 - \mu v_{Rk}) - 1}{\sqrt{(\varepsilon v_{Rk})^2 + v_F^2}}. \quad (1.23)$$

Учитывая, что μ и ε зависят от u_P , расчеты по формулам следует проводить методом последовательных приближений. В качестве первого приближения для определения μ и ε принимают $u_P = -1,28$, соответствующий $P(F_0 \leq R) = 0,9$.

Для оценки точности предлагаемого метода определения вероятности безотказной работы системы типа цепи было проведено сопоставление результатов расчета по точной (1.17) и предлагаемой (1.23) формулам при числе звеньев цепи n_k , равном 1; 10; 100; 1000, при запасе прочности по средним значениям n_{cp} , равном 1,5; 2,0, при коэффициентах вариации несущей способности звеньев v_{Rk} , равных 0,1; 0,2; 0,3, и коэффициенте вариации нагрузки $v_F = 0,2$. Результаты расчета показали, что погрешность вычислений вероятности безотказной работы цепи в области значений $P < 0,5$ не превышает 3 %, при $P = 0,5 \dots 0,9$ — 1,2 %, при $0,9 < P \leq 0,98$ — 0,8 %, при $P > 0,98$ — 0,1 %.

Результаты расчетов по формуле (1.23) с подстановкой в нее значений μ и ε , взятых из графиков рис. 1.7, при разных характерных значениях n_{cp} , v_{Rk} , v_F и n_k приведены в табл. 1.1.

Данные таблицы позволяют ориентировочно оценивать надежность систем типа цепи при рассеянии нагрузки по системам в широком диапазоне изменения несущей способности звеньев, нагрузки на цепь и числа звеньев.

Примечание. Если бы вместо рассеяния нагрузки по системам имело место рассеяние нагрузки по элементам, тогда вероятность безотказной работы элемента $P(F \leq R_k)$ оценивалась бы по квантили нормального распределения, где $u_P = -\frac{n_{cp} - 1}{\sqrt{v_{Rk}^2 + v_F^2}}$, а вероятность безотказной работы

системы определялась бы по выражению $P(F \leq R) = [P(F \leq R_k)]^{n_k}$. В этом

Таблица 1.1

Результаты расчетов по формуле (1.23)

n_{cp}	1,5			1,5			2,0		
v_{Rk}	0,05			0,1			0,1		
v_F	0,2			0,1			0,2		
n_k	1	10	100	1	10	100	1	10	100
u_P	-2,34	-1,88	-1,54	-2,77	-1,97	-0,97	-3,54	-2,93	-2,13
$P(R \geq F)$	0,990	0,970	0,938	0,997	0,976	0,834	0,999	0,998	0,983

случае для значений параметров, взятых из табл. 1.1, оценки $P(F \leq R)$ при $n_k = 10$ получились бы равными 0,906; 0,970; 0,998, а при $n_k = 100$ они были бы равны 0,663; 0,74; 0,905. Сопоставляя результаты с данными табл. 1.1, видим, что расчет в предположении рассеяния нагрузки по элементам, а не по системам существенно занижает показатель надежности системы.

Графики рис. 1.7 можно аппроксимировать выражениями:

$$\mu = 1,48\sqrt{\ln n_k} - 0,69 \quad (\text{при } n_k \geq 2);$$

$$\mu = 0 \quad (\text{при } n_k = 1);$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 - 0,102u_P) \quad (\text{при } \varepsilon_0 \leq 0,5);$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - 0,102(1 - \varepsilon_0) u_P \quad (\text{при } \varepsilon_0 > 0,5),$$

где ε_0 — параметр рассеяния ε , соответствующий $u_P = 0$,

$$\varepsilon_0 = 0,5 - 0,204 \ln(\ln n_k/3).$$

1.5. Предлагаемая теория двухпараметрического подобия

В развитие теории прочности Т. А. Конторовой и Я. И. Френкеля [67] в предположении закона распределения несущей способности элементарных объемов нормальным нами [104, 105] предложена теория двухпараметрического подобия, в основе которой лежит формула, предназначенная для нахождения предела выносливости детали по рассеянию предела выносливости образцов. Она получена представлением наиболее напряженного объема детали W_d в виде последовательной системы, состоящей из n_k звеньев (n_k названо коэффициентом масштаба), где звенья — наиболее напряженные объемы образца $W_{об}$. При статистическом моделировании такой системы использована «модель наименее прочного звена», в которой несущую способность звеньев полагали распределенной по нормальному закону. В формулу вошли две величины, требующие экспериментального определения, — среднее значение $\sigma_{об}^*$ и среднее квадратическое отклонение $S_{об}$ предела выносливости образца. Введя допущение, что предел выносливости детали распределен нормально, формулу можно представить в виде:

$$\sigma_d^* = \sigma_{об}^* - \mu S_{об}; \quad (1.24)$$

$$S_d = \varepsilon S_{об}. \quad (1.25)$$

где σ_d^* и S_d — искомое среднее значение и среднее квадратическое отклонение предела выносливости детали; μ и ε — параметры положения и рассеяния. Значения μ и ε приведены в табл. 1.2

Таблица 1.2

Значения параметров положения и рассеяния

n_k	μ	ε
2	0,54	0,85
5	1,13	0,73
10	1,50	0,65
20	1,82	0,60
50	2,20	0,54
10^2	2,46	0,51
$2 \cdot 10^2$	2,70	0,48
$5 \cdot 10^2$	2,99	0,46
10^3	3,20	0,43
10^4	3,81	0,37
10^5	4,35	0,30

и на рис. 1.8, причем для ε указано приближенное значение, определенное линейной интерполяцией графиков рис. 1.7 и совпадающее с истинным значениям плотности вероятности в двух точках — при $\sigma^* = \sigma_d^*$ и $\sigma^* = \sigma_d^* - 2S_d^*$.

Так как формулы, позволяющие оценить математическое ожидание и коэффициент вариации несущей способности цепи при нормальном распределении несущей способности звеньев, получены в предположениях независимости несущей способности звеньев и возникновения отказа системы при отказе хотя бы одного звена, т. е. при таких же предположениях, что и в существующих статистических теориях прочности, то их можно использовать для оценки математического ожидания σ_d^* и коэффициента вари-

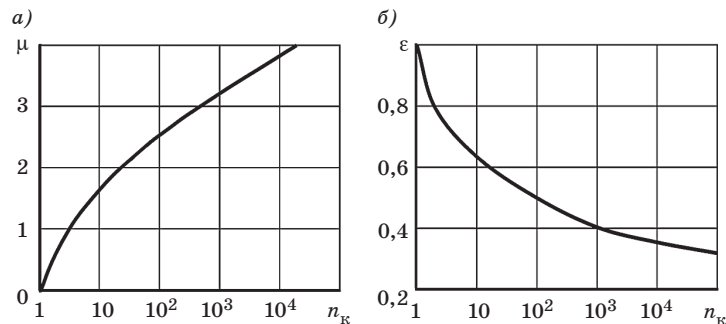


Рис. 1.8. Параметры распределения несущей способности системы: а — положения; б — рассеяния (приближенные значения)

ации v_d предела выносливости детали по математическому ожиданию $\sigma_{об}^*$ и коэффициенту вариации $v_{об}$ предела выносливости образцов одной плавки (в предположении нормального распределения предела выносливости по объему). При рассмотрении гладких детали и образца, подвергнутых растяжению-сжатию (а также геометрически подобных при нагружении одного вида) согласно ранее предложенным формулам имеем

$$\sigma_d^* = \sigma_{об}^* (1 - \mu v_{об}); \quad (1.26)$$

$$v_d = \frac{\varepsilon v_{об}}{1 - \mu v_{об}}. \quad (1.27)$$

Параметры μ и ε находят из табл. 1.2 по значению n_k , равному отношению наиболее напряженных объемов детали W_d и образца $W_{об}$:

$$n_k = W_d / W_{об}. \quad (1.28)$$

Если деталь и образец гладкие и подвергнуты растяжению, то наиболее напряженные объемы равны полным объемам. Для геометрически подобных образца и детали с концентраторами напряжений напряженные объемы пропорциональны полному.

Результаты расчета по формулам (1.26) и (1.27) показывают, что математическое ожидание и коэффициент вариации предела выносливости с увеличением размера детали уменьшаются.

1.6. Коэффициент влияния абсолютных размеров теории двухпараметрического подобия

Формула (1.26) позволяет оценить коэффициент влияния абсолютных размеров

$$\varepsilon_\sigma = \sigma_d^* / \sigma_{об}^* = 1 - \mu v_{об}. \quad (1.29)$$

Из формулы (1.29) следует [104], что с увеличением размера детали предел ее выносливости уменьшается тем быстрее, чем больше коэффициент вариации предела выносливости образцов одной плавки.

Если образцом считать гладкую деталь диаметром 7,52 мм, нагруженную круговым изгибом, с коэффициентом вариации предела выносливости $v_{об}$, то зависимость $\varepsilon_\sigma = f(d_d)$, где d_d — диаметр детали, будет иметь вид, представленный на рис 1.9. Для стали 40X характерно [113] $v_{об} = 0,05$, для стали 45 и магниевого деформируемого сплава ВМ65-1 — $v_{об} = 0,05 \dots 0,07$, для алюминиевого

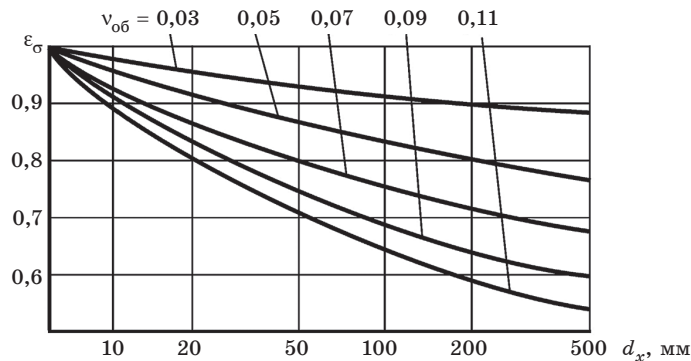


Рис. 1.9. Зависимости коэффициента влияния абсолютных размеров от диаметра детали и коэффициента вариации предела выносливости образца

деформируемого сплава АВТ — $v_{об} = 0,07$, для дюралюминиевого сплава Д16Т — $v_{об} = 0,09$, для магниевого литейного сплава Мл-5 — $v_{об} = 0,11...0,13$.

Следует отметить, что график рис. 1.9 построен для соотношения математических ожиданий пределов выносливости образца и детали. С уменьшением вероятности разрушения коэффициент влияния абсолютных размеров будет возрастать и приближаться к единице.

1.7. Учет вида нагружения и концентрации напряжений теории двухпараметрического подобия

Определим вероятностные характеристики выносливости цилиндрической детали с выточкой по результатам испытаний на круговой изгиб цилиндрического образца с выточкой иного радиуса. Коэффициент n_k можно оценить [37, 104] по значению отношения наиболее напряженных объемов детали и образца, в которых первое главное напряжение уменьшается от своего максимального значения σ_{max} в малой, но одинаковой для образца и детали степени, оцениваемой отношением $\frac{\sigma_{max} - \Delta\sigma}{\sigma_{max}}$.

Рассмотрим цилиндрический образец с круговой выточкой радиусом $\rho_{об}$ в середине (рис. 1.10). Его диаметр по дну выточки равен $d_{об}$. Пусть ось x совпадает с осью образца, а ось y направлена по радиусу. Тогда, согласно работам [13, 63], первое главное на-

пряжение σ_x в наиболее нагруженной зоне изменяется от своего максимального значения на поверхности выточки σ_{max} по радиусу на величину $\Delta\sigma_{xy}$ и по оси образца на $\Delta\sigma_{xx}$, определяемые следующим образом:

$$\Delta\sigma_{xy} \approx \sigma_{max} G_{y об} \Delta y; \quad (1.30)$$

$$\Delta\sigma_{xx} \approx \sigma_{max} k_{об} \Delta x^2 / \rho_{об}^2. \quad (1.31)$$

Здесь $G_{y об}$ — градиент по радиусу первого главного напряжения; $k_{об}$ — коэффициент, отражающий изменение первого главного напряжения по оси образца, где для растяжения-сжатия

$$G_{y об} = 2/\rho_{об}; \quad k_{об} = 1 + \rho_{об}/d_{об}, \quad (1.32)$$

для чистого изгиба

$$G_{y об} = 2/\rho_{об} + 2/d_{об}; \quad k_{об} = 1 + 2\rho_{об}/d_{об}. \quad (1.33)$$

При нагружении образца растяжением-сжатием или круговым изгибом наиболее нагруженный объем $W_{об}$, в котором напряжения изменяются от σ_{max} на величину $\Delta\sigma = \Delta\sigma_{xy} = \Delta\sigma_{xx}$, близок телу вращения равнобедренного треугольника с основанием $2\Delta x$, образующим цилиндрическую диаметром $d_{об}$ наружную поверхность тела, и высотой Δy . При малом значении отношения $\Delta\sigma/\sigma_{max}$ наиболее напряженный объем образца

$$W_{об} \approx \pi d_{об} \Delta x_{об} \Delta y_{об}. \quad (1.34)$$

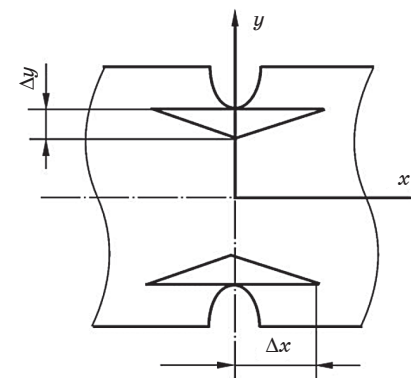


Рис. 1.10. К определению наиболее напряженных элементарных объемов приближенным методом

Подставляя в это выражение значения $\Delta x_{об}$ и $\Delta y_{об}$ из формул (1.30), (1.31), имеем

$$W_{об} \approx \pi d_{об} \frac{\rho_{об}}{\sqrt{k_{об} G_{y_{об}}}} \sqrt{\left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma_{max}}\right)^3}. \quad (1.35)$$

Аналогичное выражение может быть получено для наиболее нагруженного объема W_d детали. Взяв отношение объемов $W_d/W_{об}$, получим формулу для коэффициента масштаба

$$n_k \approx \frac{d_d \rho_d G_{y_{об}}}{d_{об} \rho_{об} G_{y_d}} \sqrt{\frac{k_{об}}{k_d}}, \quad (1.36)$$

где ρ_d и d_d , G_{y_d} и k_d — радиус выточки и диаметр по дну выточки, градиент по радиусу и коэффициент, отражающий изменение по оси первого главного напряжения детали.

Из анализа формулы (1.36) следует, что n_k в данном случае не зависит от отношения $\frac{\sigma_{max} - \Delta\sigma}{\sigma_{max}}$. Формула не изменится, если

нагружение образца и детали произведено переменным изгибом в одной плоскости.

Если установлено, что n_k меняется с изменением отношения $\frac{\sigma_{max} - \Delta\sigma}{\sigma_{max}}$, то для нахождения распределения предела выносливо-

сти детали следует вводить дополнительные операции: разбивать образец и деталь на элементарные объемы, в которых напряжения близки постоянным (на рис. 1.11 один из элементарных объемов затемнен); находить n_k для отдельных элементарных объемов; вычислять распределения пределов выносливости элементарных

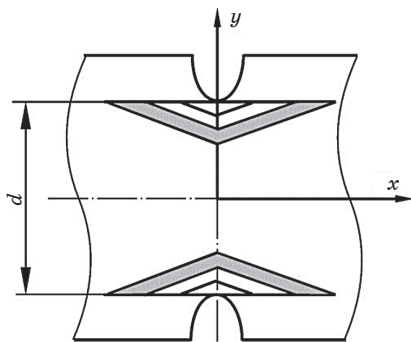


Рис. 1.11. К определению наиболее напряженных элементарных объемов уточненным методом

объемов детали; определять распределение предела выносливости детали в целом их перемножением.

Если $n_k < 1$, т. е. наиболее напряженный объем детали W_d меньше, чем у образца $W_{об}$ (деталь — с концентратором напряжений, а образец — без концентратора), тогда объем W_d можно рассматривать как одно звено в системе, образующей объем $W_{об}$:

$$\sigma_d^* = \sigma_{об}^* \left(1 + \frac{\mu^*}{\varepsilon^*} v_{об} \right);$$

$$v_d = \frac{1}{\mu^* + \frac{\varepsilon^*}{v_{об}}},$$

где μ^* и ε^* — параметры μ и ε , соответствующие параметру $n_k^* = 1/n_k$.

В работе [37] исследована точность прогнозирования предела выносливости цилиндрических деталей разных размеров с разными радиусами выточки по результатам испытаний выборки образцов одного размера. Установлено, что погрешность расчета составляет около 9 % и близка погрешности, рассчитанной по теории подобия усталостного разрушения С. В. Серенсена — В. П. Когаева.

Для более точных расчетов следует отказываться от аппроксимации предела выносливости нормальным распределением и оценивать значение предела выносливости для разных вероятностей безотказной работы по значению параметра рассеяния, зависящего не только от n_k , но и от квантили u_p нормального распределения (см. рис. 1.7), соответствующей этим вероятностям.

Выражения позволяют оценить вероятность безотказной работы с несколькими концентраторами напряжений. Наиболее напряженный объем детали в этом случае равен сумме наиболее напряженных объемов, соответствующих отдельным концентраторам.

1.8. Особенности, отличающие теорию двухпараметрического подобия от теории С. В. Серенсена — В. П. Когаева

1. Для расчетов используются только два экспериментально определяемых параметра — медианное значение и коэффициент вариации предела выносливости образца.

2. Два экспериментально определяемых параметра физически ясны и не требуют для своего определения введения эмпирических коэффициентов.

3. Теория основана на прямых расчетах для нормального распределения предела выносливости по объему детали (без аппроксимации распределения Вейбулла логарифмически-нормальным, а затем нормальным).

4. Теория позволяет оценить надежность детали с несколькими концентраторами напряжений, разнесенными по длине.