ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Н. Д. Золотарёва, М. В. Федотов

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

с решениями и указаниями

5–7 классы

ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Лаборатория знаний

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Н. Д. Золотарёва, М. В. Федотов

ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

с решениями и указаниями

5–7
классы

Под редакцией
М. В. Федотова

Москва
Лаборатория знаний

УДК 373.167.1:511
ББК 22.130я721.6
З-80

Золотарёва Н. Д.

З-80 Олимпиадная математика. Логические задачи с решениями и указаниями. 5–7 классы : учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, М. В. Федотов ; под редакцией М. В. Федотова. — М. : Лаборатория знаний, 2021. — 238 с. : ил. — (ВМК МГУ — школе).

ISBN 978-5-00101-382-2

Настоящее пособие составлено на основе олимпиадных задач по математике преподавателями факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. Пособие содержит теоретический материал, подборку задач, а также указания и решения к большинству задач.

Рекомендуется школьникам 5–7 классов, интересующимся олимпиадными задачами, учителям математики, руководителям кружков и факультативов.

УДК 373.167.1:511
ББК 22.130я721.6

Учебное издание

Серия: «ВМК МГУ — школе»

Золотарёва Наталья Дмитриевна
Федотов Михаил Валентинович

**ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА.
ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ И УКАЗАНИЯМИ.
5–7 КЛАССЫ**

Учебно-методическое пособие

Ведущий редактор *М. С. Стригунова*
Художник *В. А. Прокудин*
Технический редактор *Т. Ю. Федорова*. Корректор *И. Н. Панкова*
Оригинал-макет подготовлен *О. Г. Лапко* в пакете LaTeX 2_ε

Подписано в печать 09.04.21. Формат $70\times100/16$.
Усл. печ. л. 19,5. Заказ

Издательство «Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

ISBN 978-5-00101-382-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ РЕДАКТОРА

Уважаемые читатели, вы держите в руках одну из книг серии «ВМК МГУ — школе». Учебно-методические пособия, входящие в эту серию, являются результатом более чем пятнадцатилетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова.

Сейчас изданы пособия по алгебре, геометрии, информатике и физике для старшеклассников для подготовки к ЕГЭ, олимпиадам и вступительным экзаменам в вузы. Недавно вышли пособия по математике для подготовки к ГИА для девятиклассников.

Но мы не хотим останавливаться только на стандартных задачах, необходимых для сдачи ГИА и ЕГЭ и экзаменов в вузы. Мы хотим, чтобы школьники с младших классов и до окончания школы могли решать задачи повышенной сложности — олимпиадные задачи, на которые у учителя обычно не остаётся времени на обычном уроке математики. Большинство книг по этой тематике выходят без разбивки по классам либо без разбивки по темам. Многие хорошие книги с олимпиадными задачами вышли давно и с тех пор не переиздавались. Мы собрали много задач из различных старых и не очень старых сборников олимпиадных задач и предлагаем их вам.

Настоящее пособие рассчитано на 5–7 классы и является третьим в серии пособий по олимпиадным задачам. Будет ещё несколько книг для 5–7 классов. Параллельно мы уже ведём работу над сборником задач для 8–9 классов. Завершит серию, конечно же, пособие для 10–11 классов.

Большинство олимпиадных задач, особенно для младшей и средней школы, не намного сложнее обычных школьных задач по математике. Поэтому не бойтесь их. Они только все вместе выглядят страшными, а каждая задача по отдельности вполне вам по силам. Берите их и решайте. Дорогу осилит идущий.

Заместитель декана по учебной работе
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М.В. Ломоносова,
доцент кафедры математической физики

М. В. Федотов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Каждый раздел пособия содержит теоретические основы, описание методов решения задач, примеры применения методов и набор заданий для решения. Задачи в разделах в основном расположены по принципу «*от простого — к сложному*». Аналогичная ситуация имеет место и с последовательностью разделов, поэтому сами разделы и задачи в разделах рекомендуется изучать в предложенном порядке. Приступать к решению задач надо после изучения соответствующего теоретического материала и разбора примеров.

После номера задачи приведены номера классов, для которых эта задача была предложена на олимпиаде. Однако это разделение на классы довольно условно. Понятно, что если задачу давали в 5 классе, то её можно давать и в 6–7 классах, и часто, наоборот, задача, которую давали на олимпиаде для 6–7 классов, вполне по силам пятиклассникам. Поэтому, придерживаясь рекомендаций о принадлежности задачи тому или иному классу, относитесь к этим рекомендациям творчески. Кстати, распределение задач по разделам тоже не всегда однозначно. Одну и ту же задачу можно было отнести к разным разделам.

В принципе по этому пособию можно заниматься три года: в 5 классе пройти по всем разделам, выбирая задачи для 5 класса, в 6 классе снова пройти по всем разделам, выбирая задачи для 6 класса и т. д. А можно пройти и за более короткий срок: за два года, если вы начали заниматься в 6 классе, или за один год, если вы уже в 7 классе.

Пособие рекомендуется школьникам 5–7 классов, интересующимся олимпиадными задачами, учителям математики, руководителям кружков и факультативов.

Желаем удачи!

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\{a\}$ — множество, состоящее из одного элемента a;
$\cup$ — объединение;
$\cap$ — пересечение;
$\varnothing$ — пустое множество;
$\in$ — знак принадлежности;
$\subset$ — знак включения подмножества;
$\forall$ — для любого;
$A \backslash B$ — разность множеств A и B;
$\Longrightarrow$ — следовательно;
$\Longleftrightarrow$ — тогда и только тогда;
$\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел;
$\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел;
ОДЗ — область допустимых значений;
$\begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$ — знак системы, означающий, что должны выполняться все условия, объединённые этим знаком;
$\left[\begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array}\right.$ — знак совокупности, означающий, что должно выполняться хотя бы одно из условий, объединённых этим знаком.

Необходимо отметить, что в формулировках задач параллельно с математически более корректной терминологией типа «длина отрезка AB равна 5» и записью $|AB| = 5$ используется школьная терминология типа «отрезок AB равен 5» и запись $AB = 5$.

Часть I. ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ

Логические задачи встречаются на олимпиадах всех уровней. Они требуют умения логически мыслить, перебирать все возможные варианты и быть очень внимательным.

1. Сюжетные логические задачи

Теоретический материал

В этом разделе собраны сюжетные логические задачи. Чтобы решать такие задачи, необходимо уметь рассуждать, выделять из текста причину и следствие. Многие задачи этого раздела могут быть решены перебором вариантов. Однако использование рисунков и таблиц значительно упрощает решение.

Примеры решения задач

Пример 1. До царя дошла весть, что кто-то из трёх богатырей убил Змея Горыныча. Приказал царь им явиться ко двору. Молвили богатыри:

Илья Муромец: «Змея убил Добрыня Никитич».
Добрыня Никитич: «Змея убил Алёша Попович».
Алёша Попович: «Я убил Змея».

Известно, что только один богатырь сказал правду, а двое других слукавили. Кто убил Змея?

Решение. Поскольку Добрыня Никитич и Алёша Попович утверждают одно и то же, а правду сказал только один богатырь, они оба лукавят. Значит, правду сказал Илья Муромец и Змея убил Добрыня Никитич.
Ответ. Змея Горыныча убил Добрыня Никитич.

Пример 2. Гриша, Люда, Зина и Петя родились 12 февраля, 6 апреля, 12 июня, 26 июня. Интересно, что Петя и Люда родились в одном месяце, а Зина и Петя родились в один и тот же день разных месяцев. Когда родился Гриша?

Решение. Решаем задачу с помощью таблицы. По вертикали пишем имена, а по горизонтали — даты. Будем ставить минусы в те клетки таблицы, которые точно не подходят, т. е. будем отбрасывать заведомо неподходящие варианты. Из условия следует, что Петя и Люда родились в одном месяце, т. е. в июне. Поэтому в таблице напротив их имён ставим минусы в первых двух колонках.

Так как Зина и Петя родились в один и тот же день разных месяцев, т. е. 12 числа, то Пете ставим минус в последнюю колонку. Получается, что Петя мог родиться только 12 июня (ставим ему плюс в третью колонку таблицы). Поэтому Зина родилась 12 февраля (ставим ей плюс в первую колонку таблицы).

	12 февраля	6 апреля	12 июня	26 июня
Гриша		+		
Люда	–	–		+
Зина	+			
Петя	–	–	+	–

Тогда Люда могла родиться только 26 июня (ставим ей плюс в четвёртую колонку таблицы). Поэтому Гриша мог родиться только 6 апреля.
Ответ. 6 апреля.

Пример 3. В одном из городов Казахстана часть жителей умеет говорить только по-казахски, часть — только по-русски. По-казахски говорят 90% всех жителей, по-русски — 80%. Сколько процентов всех жителей говорит на обоих языках?

Решение. Приведём два способа решения.

Первый способ. Из условия следует, что 20% всех жителей не говорят по-русски. Очевидно, что все они среди тех жителей, которые говорят по-казахски. Значит, $90 - 20 = 70\%$ всех жителей говорят на обоих языках.

Второй способ. Из условия следует, что 10% всех жителей не говорят по-казахски, а 20% — по-русски. Значит, $10+20 = 30\%$ всех жителей говорят только на одном языке, а остальные 70% говорят на обоих языках.
Ответ. 70%.

Пример 4. В клетках прямоугольника 11×15 расставлены крестики и нолики. Известно, что в каждой строке прямоугольника крестиков больше, чем ноликов. Докажите, что обязательно найдётся столбец, в котором крестиков тоже больше, чем ноликов.

Решение. Доказательство проведём методом от противного.

Предположим обратное, т. е. пусть в каждом столбце крестиков не больше, чем ноликов. Тогда во всей таблице крестиков также не больше, чем ноликов. Но это противоречит условию, поскольку из условия следует, что если в каждой строке прямоугольника крестиков больше, чем ноликов, то и во всей таблице крестиков больше, чем ноликов.

Значит, наше предположение неверно и найдётся столбец, в котором крестиков больше, чем ноликов. Что и требовалось доказать.

Задачи

1. [5] Три поросёнка построили три домика: из соломы, из прутьев и из камней. Каждый из них получил один домик: Ниф-Ниф — не из камней и не из прутьев, Нуф-Нуф — не из камней. Какой домик достался Наф-Нафу?

2. [5-7] Рядом сидят мальчик и девочка. «Я мальчик», — говорит черноволосый ребёнок. «Я девочка», — говорит рыжий ребёнок. Если хотя бы один из них врёт, то кто здесь мальчик, а кто девочка?

3. [6-7] а) Петя сказал: «Если кот шипит, то рядом собака, и наоборот, если собаки рядом нет, то кот не шипит». Не сказал ли он что-то лишнее?

   [5-7] б) За сутки до дождя Петин кот всегда чихает. Сегодня кот чихнул. «Завтра будет дождь», — подумал Петя. Прав ли он?

4. [5-7] — У Вовы больше тысячи книг, — сказал Ваня.

   — Нет, книг у него меньше тысячи, — возразила Аня.

   — Одна-то книга у него наверняка есть, — сказала Маня.

   Если истинно только одно из этих утверждений, то сколько книг у Вовы?

5. [6] Баба-яга в своей избушке на курьих ножках завела сказочных животных трёх видов. Все они, кроме двух, — Говорящие Коты. Все, кроме двух, — Мудрые Совы; остальные — Усатые Тараканы. Сколько обитателей в избушке у Бабы-яги?

6. [5-6] а) Приехало 100 туристов. Из них 10 человек не знали ни немецкого, ни французского языка, 75 знали немецкий язык и 83 знали французский язык. Сколько туристов знали и французский, и немецкий языки?

   [6-7] б) В одном из городов Грузии часть жителей умеет говорить только по-грузински, часть — только по-русски. По-грузински говорят 85% всех жителей, по-русски —

75%. Сколько процентов всех жителей говорит на обоих языках?

6-7 в) В классе 35 учеников. Из них 20 школьников занимаются в математическом кружке, 11 — в экологическом, 10 ребят не посещают эти кружки. Сколько экологов увлекаются математикой?

7. 5-6 а) Четыре брата Юра, Петя, Вова и Коля учатся в 1, 2, 3, 4 классах. Петя — отличник, младшие братья стараются брать с него пример. Вова учится в 4 классе. Юра помогает решать задачи брату. Кто из них в каком классе учится?

б) Олег, Игорь и Аня учатся в 6 классе. Среди них есть лучший математик, лучший шахматист и лучший художник. Известно, что:

1) лучший художник не нарисовал своего портрета, но нарисовал портрет Игоря;

2) Аня никогда не проигрывала мальчикам в шахматы.

Кто в классе лучший математик, лучший шахматист и лучший художник?

8. 6-7 Львов, Михайлов и Николаев работают бухгалтером, кассиром и секретарём. Если Николаев — кассир, то Михайлов — секретарь, если Николаев — секретарь, то Михайлов — бухгалтер. Если Михайлов — не кассир, то и Львов — не кассир, если Львов — бухгалтер, то Николаев — секретарь. Кто кем работает?

9. 5-6 а) В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке не лимонад и не вода. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

б) В семье четверо детей, им 5, 8, 13 и 15 лет. Детей зовут Аня, Боря, Вера и Галя. Сколько лет каждому ребёнку, если одна девочка ходит в детский сад, Аня старше Бори и сумма лет Ани и Веры делится на 3?

в) На улице, став в кружок, беседуют четыре девочки: Аня, Валя, Галя, Надя. Девочка в зелёном платье (не Аня и не Валя) стоит между девочкой в голубом платье и Надей. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом платье и Валей. Какое платье носит каждая из девочек?

10. 6 В летний лагерь приехали отдыхать три друга: Миша, Володя и Петя. Известно, что каждый из них имеет одну из следующих фамилий: Иванов, Семёнов, Герасимов. Миша — не Герасимов. Отец Володи — инженер. Володя

учится в 6 классе. Герасимов учится в 5 классе. Отец Иванова — учитель. Какая фамилия у каждого из трёх друзей?

11. 6-7 а) Три друга — Владимир, Игорь и Сергей преподают математику, физику и литературу в школах Тулы, Рязани и Калуги. Владимир работает не в Рязани, Игорь — не в Туле, туляк преподаёт литературу, рязанец — не физику, Игорь — не математику. Какой предмет и в каком городе преподаёт каждый из них?

6 б) Три подруги вышли в белом, синем, зелёном платьях и туфлях таких же цветов. Известно, что только у Ани цвет платья и туфель совпадает. Ни платье, ни туфли Вали не были белыми. Наташа была в зелёных туфлях. Определить цвет платья и туфель каждой подруги.

6-7 в) Офицеры Александров, Борисов, Васильев и Григорьев имеют звания — майор, капитан и два лейтенанта. Александров и один из лейтенантов — танкисты, Борисов и капитан — артиллеристы, Александров младше по званию[1], чем Васильев. Определите воинское звание и род войск каждого из них.

12. 6 а) Три школьных товарища купили в буфете 14 пирожков. Коля купил в 2 раза меньше Вити, а Женя — больше Коли, но меньше Вити. Сколько пирожков купил каждый товарищ?

б) Разместите восемь козлят и девять гусей в пяти хлевах так, чтобы в каждом хлеве были и козлята, и гуси, а число их ног равнялось 10.

13. 7 а) В рождественских подарках Кролика, Тигры и других обитателей Леса было 55 хлопушек — у каждого не меньше двух. Тигра сразу же использовал свои хлопушки на то, чтобы узнать, едят тигры хлопушки или не едят. А все остальные сберегли свои хлопушки, и на следующий день каждый подарил половину своих хлопушек Кролику на день рождения. От этого число хлопушек у Кролика увеличилось в 10 раз. Сколько хлопушек продегустировал Тигра?

б) В рождественских подарках Пятачка, Тигры и других обитателей Леса было 50 бутылочек кетчупа — у каждого не меньше двух. Тигра сразу же использовал свои бутылочки на то, чтобы узнать, едят тигры кетчуп или не едят. А все остальные сберегли свой кетчуп, и на следующий день каждый подарил половину своих бутылочек

---

[1] Майор старше по званию, чем капитан, а капитан старше лейтенанта.

кетчупа Пятачку на день рождения. От этого число бутылочек кетчупа у Пятачка увеличилось в 9 раз. Сколько бутылочек кетчупа попробовал Тигра?

14. $\boxed{5\text{-}6}$ В некотором доме живут только супружеские пары с маленькими детьми, причём бездетных семей нет, у каждого мальчика есть сестра и мальчиков больше, чем девочек. Может ли оказаться, что в этом доме взрослых больше, чем детей?

15. $\boxed{7}$ а) На встрече собрались участники двух туристических походов (некоторые из них участвовали в обоих походах). В первом походе было 60% мужчин, а во втором — 75%. Докажите, что на встречу пришло не меньше мужчин, чем женщин.

    б) В кружке тяжёлого ракетостроения занимаются 40 школьников. У каждого из них есть болтики, винтики и гвоздики. Известно, что кружковцев, у которых количество гвоздиков не равно количеству болтиков, ровно 15 человек. Количество тех, у кого число винтиков равно числу гвоздиков, — 10. Докажите, что есть не менее 15 кружковцев, у которых число винтиков не равно числу болтиков.

16. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Жюри составляет варианты олимпиады для 5, 6, 7, 8, 9 и 10 классов (по одному для каждого класса). Члены жюри договорились, что в каждом варианте должно быть семь задач, ровно четыре из которых не встречаются ни в одном другом варианте. Какое максимальное число задач можно включить в такую олимпиаду?

    б) Каждый из трёх игроков записывает сто слов, после чего записи сравнивают. Если слово встретилось хотя бы у двоих, то его вычёркивают из списков.

    1) Могло ли случиться так, что у первого игрока осталось 54 слова, у второго — 75 слов, а у третьего — 80 слов?

    2) Могло ли случиться так, что у первого игрока осталось 61 слово, у второго — 80 слов, а у третьего — 82 слова?

17. $\boxed{6\text{-}7}$ а) В таблице 10×10 расставлены натуральные числа. В каждой строке подчеркнули наибольшее натуральное число (или одно из наибольших, если таковых несколько), а в каждом столбце — наименьшее (или одно из наименьших). Оказалось, что все подчёркнутые числа подчёркнуты два раза. Докажите, что все числа в таблице равны.

    б) 25 школьников стоят в ряд. Самый левый школьник выше самого правого. Докажите, что найдётся школьник в ряду, у которого левый сосед выше правого.

    в) В клетках прямоугольника 9×17 расставлены крестики и нолики. Известно, что в каждой строке прямоугольника крестиков меньше, чем ноликов. Докажите, что обязательно найдётся столбец, в котором крестиков тоже меньше, чем ноликов.

18. $\boxed{6\text{-}7}$ В кладовой лежит 300 сапог — по 100 сапог 40-го, 41-го и 42-го размеров, причём левых и правых поровну — по 150 штук. Докажите, что из имеющихся сапог можно составить по крайней мере 50 пар (в каждой паре левый и правый сапоги одного размера).

19. $\boxed{5\text{-}6}$ Митя, Толя, Сеня, Юра и Костя пришли в музей и встали в очередь. Если бы Митя встал посередине очереди, то он оказался бы между Сеней и Костей, а если бы Митя встал в конце очереди, то рядом с ним мог быть Юра, но Митя встал впереди всех своих товарищей. Кто за кем стоит?

20. $\boxed{6\text{-}7}$ На столе лежат четыре карточки, на которых сверху написано: А, Б, 4, 5 (о том, что на обратных сторонах, ничего не известно). Какое наименьшее количество карточек и какие именно надо перевернуть, чтобы проверить, верно ли утверждение: «Если на одной стороне карточки написано чётное число, то на другой стороне карточки — гласная буква»?

21. $\boxed{6\text{-}7}$ Предположим, что справедливы следующие утверждения:

1) Среди людей, имеющих телевизоры, есть такие, которые не являются малярами.

2) Люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров.

Следует ли отсюда, что не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?

22. $\boxed{7}$ Три стрелка Сергеев, Борисов и Воробьёв сделали по шесть выстрелов по одной мишени и выбили поровну очков. Известно, что Сергеев за первые три выстрела выбил 43 очка, а Борисов первым выстрелом выбил три очка. Сколько очков за каждый выстрел выбил каждый стрелок, если в 50 было одно попадание, в 25 — два, в 20 — три, в 10 — три, в 5 — два, в 3 — два, в 2 — два, в 1 — три?

23. $\boxed{5\text{-}7}$ Николай с сыном и Иван с сыном были на рыбалке. Николай поймал столько же рыб, сколько и его сын, а Иван — втрое больше, чем его сын. Всего было поймано 35 рыб. Сколько рыб поймал Иван и как звали его сына, если известно, что Иван — самый старший из рыбаков?

2. Истинные и ложные высказывания. Рыцари, лжецы, хитрецы

Теоретический материал

В этом разделе собраны логические задачи на истинные и ложные высказывания. Несколько таких задач уже было предложено в предыдущем разделе. В задачах такого типа необходимо уметь логически рассуждать и перебирать все возможные варианты. Часто удобно отбросить заведомо неподходящие варианты и рассмотреть оставшиеся. Обращаем ваше внимание на то, что если даже вы нашли непротиворечивый вариант, то это не значит, что можно заканчивать решение задачи. Нет, необходимо рассмотреть все возможные варианты или доказать, что других решений нет.

Большинство задач данного раздела будут про рыцарей (они всегда говорят правду), лжецов (всегда лгут) и хитрецов (иногда говорят правду, а иногда лгут).

Примеры решения задач

Пример 1. Житель острова Крит говорит: «Все критяне — лжецы». Истинно или ложно это высказывание?

Решение. Предположим, что это высказывание истинно. Следовательно, сам говорящий тоже лжец. Но тогда его высказывание ложно. Противоречие.

Значит, данное высказывание ложно и не все критяне лжецы, но при этом сам говорящий — лжец. Это ничему не противоречит.
Ответ. Высказывание ложно.

Пример 2. На столе стоят три одинаковых ящика, в одном находятся 2 чёрных шарика, в другом — 1 чёрный и 1 белый шарик, в третьем — два белых шарика. На ящиках написано: «2 белых», «2 чёрных», «чёрный и белый». При этом известно, что ни одна из надписей не соответствует действительности. Как, вынув только один шарик, определить правильное расположение шариков?

Решение. Необходимо вынуть шарик из ящика с надписью «чёрный и белый», так как в нём обязательно будут шарики одного цвета.

Если вынутый шарик окажется белым, то в этом ящике 2 белых шарика, в ящике с надписью «2 белых» будут 2 чёрных, а в ящике с надписью «2 чёрных» будут чёрный и белый.

Аналогично рассуждаем, если вынутый шарик — чёрный. Тогда в этом ящике 2 чёрных шарика, в ящике с надписью

«2 чёрных» будут 2 белых, а в ящике с надписью «2 белых» будут чёрный и белый.

Пример 3. Пятеро школьников приехали из пяти различных городов в Смоленск для участия в областной математической олимпиаде. «Откуда вы, ребята?» — спросили их. Вот что они ответили:

Александров: «Я живу в Рославле, а Гусаров — в Гагарине».

Богданов: «В Гагарине живёт Викторов. Я же прибыл из Вязьмы».

Викторов: «Из Рославля прибыл я, а Богданов — из Ельни».

Гусаров: «Я прибыл из Гагарина, а Дмитриев — из Ярцева».

Дмитриев: «Александров приехал из Вязьмы, а я действительно живу в Ярцеве».

Когда удивились противоречивости их ответов, ребята объяснили: «Каждый высказал одно утверждение правильное, а другое — ложное. Но по нашим ответам вполне можно установить, откуда мы приехали». Откуда приехал каждый из школьников?

Решение. Возможны два случая: верно первое утверждение Александрова, а второе ложно или, наоборот, верно второе утверждение Александрова, а первое ложно.

1) Предположим, что первое утверждение Александрова верное и он живёт в Рославле. Тогда второе его утверждение ложное и Гусаров — не из Гагарина. Поэтому первое утверждение Гусарова ложное, а второе верное и Дмитриев прибыл из Ярцева. Тогда первое утверждение Дмитриева ложное и Александров приехал не из Вязьмы. Это согласуется с нашим предположением.

Поскольку, по предположению, в Рославле живёт Александров, первое утверждение Викторова ложное. Тогда верным будет его второе утверждение, т. е. Богданов — из Ельни. Следовательно, второе утверждение Богданова ложно, а верно первое, и Викторов живёт в Гагарине. Значит, первое утверждение Викторова ложно, а второе верно, и Богданов — из Ельни. Тогда Гусарову остаётся Вязьма.

2) Рассмотрим теперь случай, когда второе утверждение Александрова верное, т. е. Гусаров — из Гагарина. Тогда второе утверждение Гусарова ложное и Дмитриев — не из Ярцева. Следовательно, первое утверждение Дмитриева верное и Александров приехал из Вязьмы.

Поскольку, по предположению, Гусаров приехал из Гагарина, то первое утверждение Богданова ложно, а второе верно, и Богданов прибыл из Вязьмы. Это противоречит тому, что из

Вязьмы приехал Александров. Значит, второй случай невозможен.
Ответ. Александров приехал из Рославля; Богданов — из Ельни; Викторов — из Гагарина; Гусаров — из Вязьмы; Дмитриев — из Ярцева.

Пример 4. На какой вопрос все жители острова рыцарей (рыцари всегда говорят правду) и лжецов (они всегда лгут) дадут один и тот же ответ?

Решение. Таких вопросов можно задать несколько. Например:
на вопрос: «Вы — рыцарь?» и рыцарь, и лжец ответят «Да»;
на вопрос: «Вы — лжец?» оба ответят «Нет»;
на вопрос: «Кто вы — рыцарь или лжец?» и тот и другой ответят «Рыцарь».

То есть при попытке выяснить, кем является житель острова, из ответов будет следовать, что на острове живут одни рыцари, и никто не назовёт себя лжецом.
Ответ. «Вы — рыцарь?» (Да.); «Вы — лжец?» (Нет.); «Кто вы — рыцарь или лжец?» (Рыцарь.).

Пример 5. В городе Невезения на острове лжецов и рыцарей живут 100 человек. Каждый житель города поклоняется одному из трёх богов — богу Солнца, богу Луны или богу Земли. Каждому жителю города задали три вопроса:

1) Поклоняетесь ли вы богу Солнца?
2) Поклоняетесь ли вы богу Луны?
3) Поклоняетесь ли вы богу Земли?

На первый вопрос утвердительно ответили 60 человек, на второй — 40 человек и на третий — 30 человек. Сколько лжецов на острове?

Решение. Очевидно, что каждый рыцарь дал утвердительный ответ только на один вопрос, а каждый лжец — на два. Поэтому суммарное количество утвердительных ответов равно числу рыцарей плюс удвоенное число лжецов, т. е. всему населению острова плюс число лжецов. Поскольку утвердительных ответов было $60 + 40 + 30 = 130$, а жителей 100, то на острове живёт 30 лжецов.
Ответ. 30 лжецов.

Задачи

1. $\boxed{5}$ а) Истинно или ложно высказывание: «Нет правил без исключения»? (Данное высказывание также является правилом.)

б) Коля произнёс истинное утверждение. Миша повторил его дословно, и оно стало ложным. Что мог сказать Коля?

2. 5 а) В корзине лежат 30 грибов. Среди любых 12 из них имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов — хотя бы один груздь. Сколько груздей и сколько рыжиков в корзине?

   б) В правительстве 20 министров. По крайней мере один из них честен. Из любых двух министров хотя бы один продажен. Сколько честных министров?

3. 6-7 Племя людоедов поймало Робинзона Крузо. Вождь сказал: «Мы бы рады отпустить тебя, но по нашему закону ты сначала должен произнести какое-нибудь утверждение. Если оно окажется истинным, мы съедим тебя. Если оно окажется ложным, тебя съест наш лев». Помогите Робинзону.

4. 5 а) Мачеха, уезжая на бал, дала Золушке мешок, в котором были перемешаны мак и просо, и велела перебрать их. Когда Золушка уезжала на бал, она оставила три мешка: в одном — просо, в другом — мак, а в третьем — ещё не разобранная смесь. Чтобы не перепутать мешки, Золушка к каждому из них приклеила таблички: «Мак», «Просо», «Смесь». Мачеха вернулась с бала первой и нарочно поменяла местами таблички так, чтобы на каждом мешке оказалась неправильная запись. Ученик Феи успел предупредить Золушку, что теперь ни одна надпись на мешках не соответствует действительности. Тогда Золушка достала только одно-единственное зёрнышко из одного мешка и, посмотрев на него, сразу догадалась, где что лежит. Как она это сделала?

   5 б) В трёх мешках находятся крупа, вермишель и сахар. На одном мешке написано «крупа», на другом — «вермишель», на третьем — «крупа или сахар». В каком мешке что находится, если содержимое каждого из них не соответствует записи?

   6-7 в) Пришёл Иван-царевич в подземелье в Кощею Бессмертному Василису Прекрасную освобождать. В подземелье три темницы. В одной из них томится Василиса, в другой расположился Змей Горыныч, а третья темница пустая. На дверях есть надписи, но все они ложные. На первой темнице написано: «Здесь Василиса Прекрасная»; на второй темнице: «Темница № 3 не пустая»; на третьей темнице написано: «Здесь Змей Горыныч». В какой же темнице Василиса?

5. [5] В Стране чудес проводилось следствие по делу об украденной муке. На суде Мартовский Заяц заявил, что муку украл Болванщик. В свою очередь Болванщик и Соня дали показания, в которых указали на вора, но эти показания по каким-то причинам не были записаны. В ходе судебного заседания выяснилось, что муку украл лишь один из трёх подсудимых и что только он дал правдивые показания. Кто украл муку?

6. [6-7] На суде каждый из троих подсудимых обвинял одного из двух других. Оказалось, что первый был единственным, кто говорил правду. Если бы каждый стал обвинять другого из оставшихся (но не себя), то второй был бы единственным, кто сказал правду. Кто виновен?

7. [6-7] а) Инопланетяне сообщили жителям Земли, что в системе их звезды три планеты А, Б, В. Они живут на второй планете. Далее передача сообщения ухудшилась из-за помех, но было принято ещё два сообщения, которые, как установили учёные, оказались оба ложными:

   1. А — не третья планета от звезды.
   2. Б — вторая планета.

   Как называется планета, на которой живут инопланетяне?

   б) К Васе пришли его одноклассники. Мать Васи спросила у него, сколько пришло гостей. Вася ответил: «Больше шести», а стоявшая рядом сестрёнка сказала: «Больше пяти». Сколько было гостей, если известно, что один ответ верный, а другой нет?

8. [6-7] а) Три брата имеют звания: капитан, старшина и сержант. Из трёх утверждений: «Алексей — старшина», «Владимир — не старшина», «Семён — не сержант» — лишь одно верное. Является ли Семён старшиной?

   б) Три богини пришли к юному Парису, чтобы тот решил, кто из них прекраснее.

   Афродита: «Я самая прекрасная, Гера не самая прекрасная».
   Афина: «Афродита не самая прекрасная. Я самая прекрасная».
   Гера: «Я самая прекрасная».

   Парис предположил, что все утверждения прекраснейшей из богинь истинны, а все утверждения остальных богинь ложны. Исходя из этого, определите прекраснейшую из богинь.

[. . .]

Федотов Михаил Валентинович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики, заместитель декана по учебной работе факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. Область научных интересов: математическая физика, дифференциальные уравнения, численные методы, математические модели нелинейной оптики. Автор более 100 научных и учебно-методических работ.

Организовал и долгое время возглавлял Учебный центр факультета (1998–2014), в состав которого входят подготовительные курсы.

Золотарёва Наталья Дмитриевна — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. Преподаватель подготовительных курсов МГУ, член экзаменационной комиссии МГУ. Область научных интересов: адаптивно измельчаемые сетки для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, оценка погрешности численных методов для решения ОДУ.

Является сертифицированным экспертом ГИА-11 по математике. Автор более 50 научных и учебно-методических работ.

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Серия книг **«ВМК МГУ–школе»** — результат многолетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова. В серию входят пособия по алгебре, геометрии, физике и информатике. Все они предназначены для подготовки и успешной сдачи ГИА и ЕГЭ, а также поступления в престижные вузы страны.

Олимпиадная математика — новое направление серии «ВМК МГУ–школе». Его основная задача — научить школьников всех возрастов решать задачи повышенной сложности.

Настоящее пособие предназначено для учащихся 5–7 классов и является третьим в серии пособий по олимпиадным математическим задачам. Выпущены ещё несколько книг для 5–7 классов — по другим разделам математики, также готовятся сборники задач для 8–9 и 10–11 классов.

Большинство олимпиадных задач, особенно для младшей и средней школы, не намного сложнее обычных школьных задач по математике. Поэтому не бойтесь их. Они только все вместе выглядят страшными, а каждая задача по отдельности вполне вам по силам. Берите их и решайте!

ISBN 978-5-00101-382-2

9 785001 013822