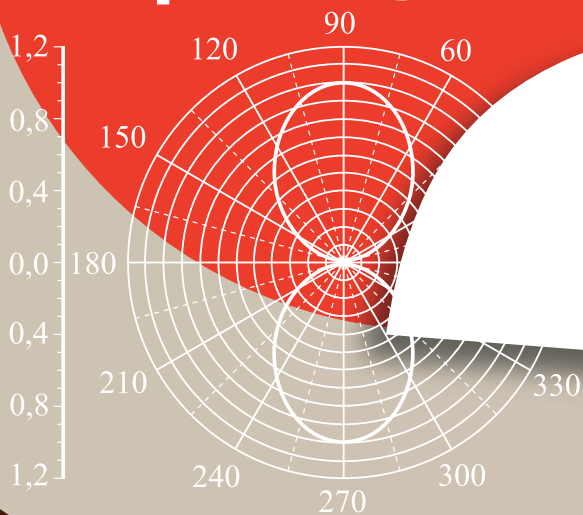


Н. П. Калашников
М. А. Смондырев

ОСНОВЫ ФИЗИКИ



ЛАБОРАТОРИЯ

ПИЛОТ

УЧЕБНИК ДЛЯ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

Н. П. Калашников, М. А. Смондырев

ОСНОВЫ ФИЗИКИ

Том 2



Москва
Лаборатория знаний

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73
К17

Серия основана в 2009 г.

Калашников Н. П.

К17 Основы физики : в 2 т. Т. 2 / Н. П. Калашников, М. А. Смондырев. — М. : Лаборатория знаний, 2017. — 606 с. : ил. — (Учебник для высшей школы).

ISBN 978-5-00101-005-0 (Т. 2)

ISBN 978-5-00101-003-6

Учебник соответствует программе дисциплины «Физика» для естественнонаучных и технических университетов. Два его тома входят в состав учебного комплекта, включающего также учебное пособие «Основы физики. Упражнения и задачи» тех же авторов.

Во многих отношениях данный учебник не имеет аналогов. Ряд оригинальных методических приемов и способов изложения материала, включение новых, зачастую неожиданных тем и ярких примеров, отсутствующих в традиционных курсах физики, позволяют учащимся приобрести навыки уверенного самостоятельного мышления, глубже понять физические основы самых различных природных явлений, делать практические, качественные оценки, оперируя размерностями и порядками величин.

Для студентов естественнонаучных и инженерно-технических специальностей.

**УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73**

Учебное издание

Серия: «Учебник для высшей школы»

**Калашников Николай Павлович
Смондырев Михаил Александрович**

ОСНОВЫ ФИЗИКИ

В двух томах

Том 2

Ведущие редакторы *И. Я. Иццоки, Т. Г. Хохлова*

Художники *В. Е. Шкерин, В. А. Прокудин*

Корректор *Н. В. Бурдина*

Оригинал-макет подготовлен *М. А. Смондыревым* в пакете \LaTeX 2 ϵ

Подписано в печать 25.04.17. Формат 70×100/16.

Усл. печ. л. 49,4. Заказ

Издательство «Лаборатория знаний»

125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3

Телефон: (499) 157-5272, e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

ISBN 978-5-00101-005-0 (Т. 2)

ISBN 978-5-00101-003-6

© Лаборатория знаний, 2017

Оглавление

Часть IV	Колебания и волны	3
Глава 24	Колебательное движение	5
24.1	Уравнение гармонических колебаний	5
	Пружинный маятник	5
	Математический маятник	6
	Физический маятник	7
	Движение поршня в сосуде с идеальным газом	8
	Электромагнитный контур	8
24.2	Гармонические колебания	9
24.3	Сохранение энергии при гармонических колебаниях	13
24.4	Сложение однонаправленных колебаний	15
	Сложение колебаний с одинаковыми частотами	15
	Биения	16
	Колебания двух связанных осцилляторов	18
24.5	Сложение взаимно перпендикулярных колебаний	21
24.6	Свободные затухающие колебания	23
	Уравнение затухающих колебаний	23
	Анализ решений	24
24.7	Вынужденные колебания	28
	Контрольные вопросы	31
Глава 25	Переменный ток	33
25.1	Квазистационарные токи	33
25.2	Переменный ток через элементы цепи	33
	Переменный ток через сопротивление	33
	Переменный ток через индуктивность	34
	Переменный ток через емкость	35
25.3	Цепь переменного тока	35
25.4	Резонансные явления	37
	Резонанс напряжений	38
	Резонанс токов	38
25.5	Мощность в цепи переменного тока	41
	Контрольные вопросы	42

Глава 26	Нелинейные колебания	43
26.1	Нелинейные колебания маятника	44
26.2	Фазовый портрет	47
26.3	Автоколебания	50
26.4	Эволюция и взаимодействие популяций	54
	Популяция в отсутствие сдерживающих факторов	54
	Внутривидовая конкуренция	55
	О взаимоотношениях зайцев и волков	57
	Контрольные вопросы	60
Глава 27	Волновые процессы	61
27.1	Волны в упругих средах	61
	Колебания струны	61
	Колебания в идеальном газе	62
	Колебания в твердых телах	64
27.2	Решение волнового уравнения	64
27.3	Энергия волны	69
	Применения к звуковой волне	70
27.4	Стоячие волны	72
	Струна, закрепленная на одном конце	73
	Гармоники	74
	Сложение гармоник	75
	Спектр колебаний	78
27.5	Сферические волны	80
	Трехмерное волновое уравнение	81
	Эффект Доплера для звуковых волн	82
	Сверхзвуковые скорости	87
	Контрольные вопросы	90
Часть V	Основы волновой оптики	93
Глава 28	Волновая теория света и законы геометрической оптики	95
28.1	Принцип Гюйгенса	95
28.2	Законы отражения и преломления света	96
	Закон отражения	96
	Закон преломления	97
	Принцип Ферма	100
	Контрольные вопросы	101
Глава 29	Интерференция света	103
29.1	Интенсивность света	103
29.2	Когерентность световых волн	104
29.3	Интерференция света от двух источников	107
29.4	Способы наблюдения интерференции света	109

29.5	Интерференция света в тонких пленках	110
29.6	Полосы равной толщины. Кольца Ньютона	112
29.7	Интерферометры	114
	Контрольные вопросы	116
Глава 30	Дифракция света	117
30.1	Принцип Гюйгенса—Френеля	117
30.2	Метод зон Френеля	119
30.3	Дифракция на круглом отверстии и диске	122
30.4	Дифракция Фраунгофера от щели	124
30.5	Дифракционная решетка	129
	Дифракция от двух щелей	130
	Дифракция на решетке	131
	Характеристики дифракционной решетки	134
30.6	Дифракция рентгеновских лучей	136
30.7	Голография	138
	Контрольные вопросы	141
Глава 31	Влияние среды на свойства света	143
31.1	Поляризация света	143
	Поляризация электромагнитной волны	143
	Естественный и поляризованный свет	144
	Закон Малюса	146
	Поляризация при отражении и преломлении	148
31.2	Дисперсия света	150
	Теория радуги	153
	Элементарная теория дисперсии	157
31.3	Поглощение света	160
31.4	Рассеяние света	161
	Контрольные вопросы	161
Глава 32	Электромагнитные волны	163
32.1	Усреднение микроскопических полей	163
32.2	Уравнения Максвелла для сплошных сред	166
32.3	Волновое уравнение	168
32.4	Основные свойства электромагнитных волн	169
32.5	Эффект Доплера для электромагнитных волн	172
	Отражение света от движущегося зеркала	174
32.6	Энергия и импульс электромагнитного поля	176
	Давление света	178
	Солнечный парус	179
32.7	Законы оптики и уравнения Максвелла.	
	Формулы Френеля	180
	Отражение и преломление s -поляризованной волны	181
	Отражение и преломление p -поляризованной волны	184

32.8	Полное внутреннее отражение	186
32.9	Затухание волн в металле. Скин-эффект	188
32.10	Дипольное излучение	191
32.11	Излучение равномерно движущегося заряда	197
	Контрольные вопросы	199
Часть VI Основы квантовой механики		201
Глава 33	Квантовая природа излучения	203
33.1	Тепловое излучение	203
33.2	Эмпирические законы излучения абсолютно черного тела	209
33.3	Классические результаты для теплового излучения	211
33.4	Закон излучения Планка	213
	Контрольные вопросы	218
Глава 34	Фотоны	219
34.1	Кванты света	219
34.2	Фотоэлектрический эффект	221
34.3	Эффект Комптона	225
34.4	Опыт Боте	230
	Контрольные вопросы	232
Глава 35	Волновые свойства микрочастиц	233
35.1	Атом Бора	233
	Постулаты Бора	234
	Характеристики водородоподобного атома	235
35.2	Волны материи	241
35.3	Соотношения неопределенностей	246
	Некоторые следствия соотношений неопределенностей	247
35.4	Двухщелевой эксперимент	251
35.5	О границах применимости квантовой механики	252
	Контрольные вопросы	255
Глава 36	Уравнение Шрёдингера	257
36.1	Волна вероятности	257
36.2	Общее уравнение Шрёдингера	259
36.3	Операторы, симметрия и законы сохранения	261
36.4	Стационарное уравнение Шрёдингера	262
36.5	Уравнение Шрёдингера для простейших систем	265
	Свободная частица, движущаяся вдоль оси x	265
	Частица в бесконечно глубокой потенциальной яме	266
	Частица в трехмерной потенциальной яме	268
	Одномерный осциллятор	269
	Трехмерный осциллятор	270

36.6	Принцип соответствия Бора	271
36.7	Отражение и туннелирование частиц	273
	Низкий бесконечный барьер	273
	Высокий бесконечный барьер	275
	Конечный потенциальный барьер	276
36.8	Оптическая аналогия прохождения частицы над барьером	281
	Ступенчатый потенциал	281
	Прямоугольный барьер конечной ширины	283
	Прохождение света через многослойную структуру	285
	Контрольные вопросы	287
Глава 37	Теория атома	289
37.1	Коммутирующие операторы	289
37.2	Момент количества движения	291
37.3	Атом водорода	295
37.4	Спин электрона и тонкая структура спектров	303
	Опыт Штерна—Герлаха	306
37.5	Векторная модель атома	310
37.6	Принцип Паули и валентность элементов	312
	Эффективный заряд ядра, оценки потенциала ионизации и закон Мозли	314
	Электронная конфигурация атомов	316
37.7	Принцип тождественности частиц	317
	Контрольные вопросы	320
Глава 38	Физическая природа химической связи	321
38.1	Молекулы	321
	Ионная связь	321
	Ковалентная связь	323
	Комбинации различных типов связи	328
38.2	Пространственное строение молекул	330
38.3	Молекулярные спектры	332
	Электронные уровни энергии	333
	Энергия колебательного движения ядер	333
	Энергия вращательного движения молекул	334
	Молекулярные спектры	335
38.4	Комбинационное рассеяние света	336
Часть VII	Основы теории строения вещества	339
Глава 39	Взаимодействие излучения с веществом	341
39.1	Вывод формулы Планка по Эйнштейну	341
39.2	Общие сведения о лазерах	345
	Прохождение излучения через вещество. Инверсия населенностей	345

	Принцип работы лазера	346
	Типы лазеров	349
39.3	Нелинейные эффекты в оптике	352
	Контрольные вопросы	355
Глава 40	Теплоемкость кристаллов. Статистика Бозе—Эйнштейна	357
40.1	Классические представления о теплоемкости кристаллов	357
40.2	Средняя энергия квантового осциллятора	359
	Средняя энергия квантового ротатора	361
40.3	Теплоемкость кристаллов по Эйнштейну	363
40.4	Теория теплоемкости твердых тел Дебая	364
	Число колебаний в единице объема	364
	Характеристическая температура Дебая	366
40.5	Фононы	368
	Линейная цепочка одинаковых атомов	369
	Линейная двухатомная цепочка	370
	Квантование колебаний кристаллической решетки	373
40.6	Статистика Бозе—Эйнштейна	375
	Плотность квантовых состояний	378
	Конденсация Бозе—Эйнштейна	379
	Контрольные вопросы	382
Глава 41	Элементы физики твердого тела. Статистика Ферми—Дирака	383
41.1	Энергетические зоны в твердых телах	383
	Применение оптической аналогии	383
	Формирование энергетических зон в кристалле	384
41.2	Металлы, диэлектрики и полупроводники	388
41.3	Теория свободных электронов в металле. Энергия Ферми	390
	Электронный газ при нулевой температуре	393
41.4	Статистика Ферми—Дирака	396
41.5	Распределение Ферми—Дирака	396
41.6	Эффективная масса электрона	404
41.7	Электропроводность металлов	408
41.8	Полупроводники	409
	Дырки	409
	Собственная проводимость полупроводников	412
	Примесная проводимость полупроводников	415
	Контрольные вопросы	420
Глава 42	Контактные явления	421
42.1	Работа выхода и контактная разность потенциалов в металле	421
42.2	Термоэлектрические явления	424
	Термо-ЭДС	425

	ЭДС термопары	428
	Эффект Пельтье	431
	Эффект Томсона	434
42.3	Полупроводниковые выпрямители	438
	Контактная разность потенциалов в p - n -переходе	438
	Сопротивление и односторонняя проводимость p - n -перехода	439
	Туннельный диод	441
	Фотоэлектрические явления в полупроводниках	444
	Контрольные вопросы	448
Глава 43	Макроскопические квантовые явления	449
43.1	Сверхтекучесть	449
	Элементы микроскопической теории сверхтекучести	450
	Сверхтекучесть конденсата	452
43.2	Сверхпроводимость	453
	Эффект Мейснера и критические значения температуры и магнитного поля	454
	Сверхпроводники 2-го рода и вихри Абрикосова	457
	Промежуточное состояние	461
	Уравнение Лондонов	462
	Квантование магнитного потока	464
	Электрон-фононное взаимодействие и куперовские пары	466
	Микроскопическая теория сверхпроводимости (БКШ)	467
	Туннелирование электронов при контакте сверхпроводников	471
	Эффекты Джозефсона	474
	Контрольные вопросы	481
Часть VIII	Основы физики микромира	483
Глава 44	Физика атомного ядра	485
44.1	Состав атомного ядра	485
44.2	Физическая природа ядерных сил	487
44.3	Масса и дефект массы ядра	489
44.4	Модели атомного ядра	493
	Модель жидкой капли	493
	Оболочечная модель ядра	496
44.5	Радиоактивность	499
	Закон радиоактивного распада	500
	Распад «дочерних ядер»	502
	Альфа-распад	505
	Бета-распад	508
	Ядерные реакции и определение возраста археологических образцов радиоуглеродным методом	510
44.6	Элементы дозиметрии	518
44.7	Атомная и термоядерная энергетика	524

	Деление ядер	524
	Цепная реакция. Атомные бомбы и реакторы	528
	Термоядерная энергетика	538
	Контрольные вопросы	543
Глава 45	Основные представления физики элементарных частиц	545
45.1	Фундаментальные взаимодействия	545
	Квантовая электродинамика	546
	Сильные ядерные взаимодействия	549
	Слабые взаимодействия	553
	Нарушение P -, C - и CP -симметрии в слабых взаимодействиях	557
45.2	Квантовая хромодинамика	559
45.3	Кварки и лептоны в Стандартной теории	563
	Контрольные вопросы	566
Глава 46	Элементарные частицы и космология	567
46.1	За пределами Стандартной модели	568
	Масса нейтрино	568
	Барионная асимметрия Вселенной	569
	Великое объединение	570
	Суперсимметрия	571
	Суперструны	572
46.2	Вселенная — прошлое и будущее	573
	Расширяющаяся Вселенная и закон Хаббла	573
	Критическая плотность	580
	Темная материя	581
	Темная энергия	585
	Гравитация и планковские масштабы	588
	Горячая Вселенная и Большой взрыв	590
	Контрольные вопросы	594
ЭПИЛОГ		595

Часть IV

Колебания и волны

*И тогда я увидел Маятник.
Движущийся шар на конце длинной нити,
прикрепленной к своду центрального
купола, описывал широкие колебательные
движения ритмично и величаво.
Любой поддался бы очарованию этого
мирного дыхания.*

У. Эко. «Маятник Фуко»

Глава 24

Колебательное движение

Физические процессы, характеризующиеся той или иной степенью повторяемости, называются колебаниями. В зависимости от физической природы повторяющегося процесса различают колебания механические, электромагнитные, электромеханические и т. д.

В зависимости от характера воздействия на колеблющееся тело различают свободные (или собственные) и вынужденные колебания.

Если положение системы в любое время может быть описано единственным параметром, то система имеет одну степень свободы. Примеры таких систем: маятник, колеблющийся в заданной плоскости; масса, связанная с пружиной; LC -цепочка (рис. 24.1). Обычно для таких систем употребляют общее название *осциллятор* (от англ. *oscillate* — колебаться, вибрировать).

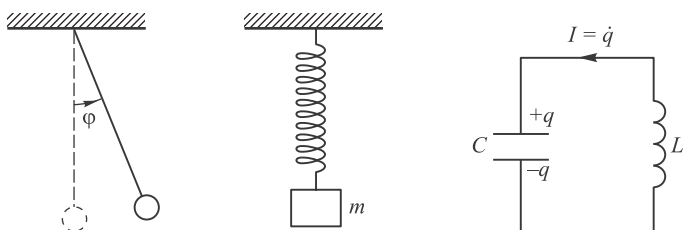


Рис. 24.1. Примеры колебательных систем с одной степенью свободы

24.1 Уравнение гармонических колебаний

В этом разделе мы покажем, что уравнения колебательного движения многих систем в сущности одинаковы, так что различные физические процессы могут быть описаны одними и теми же математическими формулами.

Пружинный маятник

Рассмотрим систему, состоящую из шарика массой m , подвешенного на пружине (рис. 24.2). В положении равновесия сила тяжести mg уравновешивается упругой

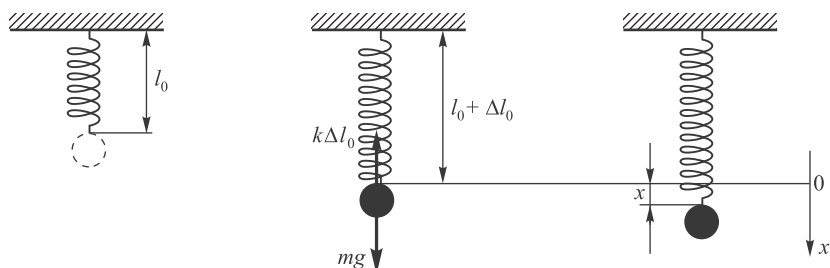


Рис. 24.2. Пружинный маятник (к выводу уравнения движения)

силой $k\Delta l_0$:

$$mg = k\Delta l_0, \quad \text{откуда} \quad \Delta l_0 = \frac{mg}{k}, \quad (24.1)$$

где Δl_0 — статическое удлинение пружины. Направим ось x вниз и выберем начало отсчета так, чтобы координата $x = 0$ соответствовала положению неподвижного шарика в положении равновесия.

Если теперь оттянуть шарик от положения равновесия на расстояние x , то полное удлинение пружины станет равным $\Delta l_0 + x$. С учетом закона Гука результирующая сила, действующая на шарик, будет тогда равна:

$$F = mg - k(\Delta l_0 + x). \quad (24.2)$$

Используем соотношение (24.1) и в результате получим, что

$$F = -kx. \quad (24.3)$$

Знак «минус» означает, что сила стремится уменьшить отклонение шарика от положения равновесия. Полученное выражение соответствует упругой силе слабо деформированной пружины.

Запишем теперь уравнение второго закона Ньютона: $m\ddot{x} = -kx$. Его можно также представить в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (24.4)$$

Математический маятник

Математический маятник представляет собой идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке.

Будем характеризовать отклонение маятника от положения равновесия углом φ , который образует нить с вертикалью (рис. 24.3). При отклонении маятника от положения равновесия на материальную точку массой m действуют сила тяжести mg и сила натяжения нити N . Их равнодействующая F направлена по касательной к окружности радиусом l и равна $F = -mg \sin \varphi$. Скорость материальной точки тоже направлена по касательной и равна $v = l\dot{\varphi}$, так что тангенциальное ускорение $a_\tau = \dot{v} = l\ddot{\varphi}$. Записываем теперь уравнение движения:

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi \quad (24.5)$$

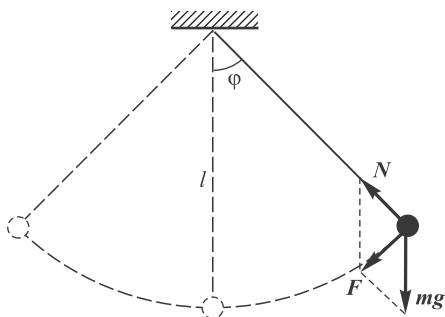


Рис. 24.3. Силы, возникающие при колебаниях математического маятника (к выводу уравнения движения)

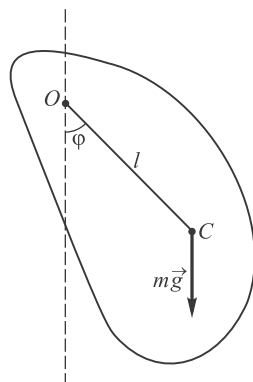


Рис. 24.4. При выводе уравнения движения физического маятника необходимо учитывать его момент инерции J

(знак «минус» соответствует тому, что сила F стремится уменьшить угол φ). При небольших отклонениях маятника $\sin \varphi \approx \varphi$. Получаем

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (24.6)$$

Физический маятник

Если колеблющееся тело, подвешенное на оси, невозможно представить как материальную точку, маятник называется *физическим* (рис. 24.4). При отклонении маятника от положения равновесия на угол φ возникает вращательный момент, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия. Этот момент равен:

$$M = -mgl \sin \varphi, \quad (24.7)$$

где m — масса маятника, а l — расстояние OC между точкой подвеса O и центром масс C маятника.

Рассматривая φ как вектор, связанный с направлением поворота правилом правого винта, противоположность знаков M и φ можно объяснить тем, что векторы \vec{M} и $\vec{\varphi}$ направлены в противоположные стороны. Обозначив момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса, через J , можно записать основное уравнение динамики вращательного движения:

$$J\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi. \quad (24.8)$$

Ограничимся рассмотрением малых колебаний: $\sin \varphi \approx \varphi$. В этом случае уравнение колебаний принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}. \quad (24.9)$$

В случае, когда физический маятник можно представить как материальную точку, колеблющуюся на нити длиной l , момент инерции равен $J = ml^2$, и мы приходим к уравнению (24.6) движения математического маятника.

Движение поршня в сосуде с идеальным газом

Рассмотрим поршень массой m и площадью поверхности S , закрывающий сосуд объемом V_0 с идеальным газом, изолированным от окружающей среды (рис. 24.5). Пусть в состоянии равновесия давление в сосуде равно p_0 . Это давление складывается из атмосферного давления p_a и давления mg/S , оказываемого поршнем:

$$p_0 = p_a + \frac{mg}{S}. \quad (24.10)$$

Переместим поршень на расстояние x . Объем сосуда увеличится и станет равным $V = V_0 + Sx$. Соответственно уменьшится давление. Поскольку процесс идет без теплообмена, применяем уравнение адиабаты (см. т. 1, уравнение (11.30)) и находим новое давление:

$$pV^\gamma = p_0V_0^\gamma, \quad \text{откуда} \quad p = \frac{p_0}{(1 + Sx/V_0)^\gamma}. \quad (24.11)$$

Здесь γ — показатель адиабаты, зависящий от числа степеней свободы молекул газа. При малых колебаниях, когда смещения поршня много меньше высоты сосуда ($x \ll V_0/S$), можно разложить p в ряд Тейлора:

$$p \approx p_0 \left(1 - x \frac{\gamma S}{V_0} \right). \quad (24.12)$$

На поршень действуют три силы: сила атмосферного давления $-p_a S$, сила давления газа в сосуде pS и сила тяжести $-mg$. Знаки сил соответствуют выбору положительного направления оси x вверх. Используя (24.10) и (24.12), находим для равнодействующей F этих сил:

$$\begin{aligned} F &= -p_a S + pS - mg = -S \left(p_0 - \frac{mg}{S} \right) + Sp_0 \left(1 - x \frac{\gamma S}{V_0} \right) - mg = \\ &= -x \frac{\gamma p_0 S^2}{V_0}. \end{aligned} \quad (24.13)$$

Записываем теперь уравнение движения поршня $m\ddot{x} = F$ в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0 S^2}{mV_0}}. \quad (24.14)$$

Электромагнитный контур

Рассмотрим колебательный контур, состоящий из конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L (рис. 24.6). Сопротивлением катушки и проводов пренебрегаем. Пусть в цепи идет ток I , заряжающий конденсатор: $I = dq/dt$. Так как внешняя ЭДС к контуру не приложена, ЭДС самоиндукции $\mathcal{E} = -L\dot{I}$ равна напряжению q/C на конденсаторе. Имеем два уравнения:

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (24.15)$$

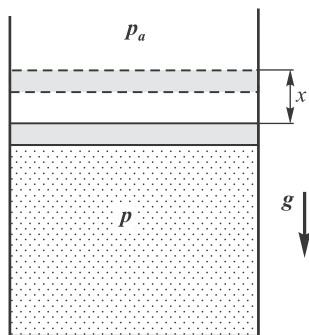


Рис. 24.5. Колебания поршня, закрывающего сосуд с идеальным газом

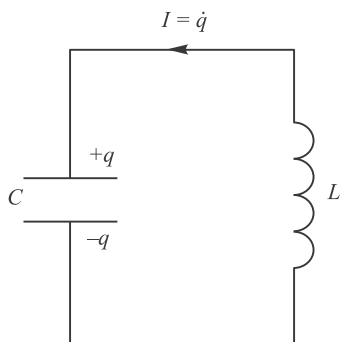


Рис. 24.6. Электромагнитный колебательный контур

Подставляя первое уравнение во второе, получаем уравнение для изменения заряда на конденсаторе:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (24.16)$$

Вместо использованной подстановки выражения тока через заряд можно продифференцировать второе из уравнений (24.15) и выразить производную от заряда через ток. В результате получим аналогичное уравнение для изменения тока в цепи с тем же выражением для ω_0 , что и в (24.16):

$$\ddot{I} + \omega_0^2 I = 0. \quad (24.17)$$

24.2 Гармонические колебания

Мы рассмотрели несколько совершенно различных систем и убедились, что уравнения движения приводятся к одной и той же форме:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (24.18)$$

Разница между физическими системами сводится к различию в формулах для частоты собственных колебаний ω_0 , что связано с разным физическим смыслом переменной x : это может быть координата, угол, заряд, ток и т. д. Уравнение (24.18) описывает так называемые **гармонические** колебания. Гармоническими колебаниями называют такие колебательные движения, при которых смещение тела от положения равновесия совершается по закону синуса или косинуса. Такие колебания иногда называют *малыми колебаниями*, потому что линейный закон для «возвращающей силы» (в широком смысле слова) характерен именно для малых отклонений системы от положения равновесия.

Уравнение гармонических колебаний (24.18) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка (так как оно содержит вторую производную от переменной x). Линейность уравнения означает, что:

- 1) если какая-то функция $x(t)$ является решением этого уравнения, то функция $Cx(t)$ также будет его решением (C — произвольная постоянная);
- 2) если функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ являются решениями этого уравнения, то их сумма $x_1(t) + x_2(t)$ также будет решением того же уравнения.

Доказана также математическая теорема, что уравнение второго порядка имеет два независимых решения. Все остальные решения, согласно свойствам линейности, могут быть получены как их линейные комбинации.

Непосредственным дифференцированием легко проверить, что независимые функции $\sin \omega_0 t$ и $\cos \omega_0 t$ удовлетворяют уравнению (24.18). Значит, общее решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t, \quad (24.19)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Это решение может быть представлено и в другом виде. Введем величину

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad (24.20)$$

и определим угол α соотношениями

$$\cos \alpha = \frac{C_2}{A} = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \quad \sin \alpha = -\frac{C_1}{A} = -\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}. \quad (24.21)$$

Тогда общее решение (24.19) можно записать как

$$x(t) = A(\cos \omega_0 t \cos \alpha - \sin \omega_0 t \sin \alpha). \quad (24.22)$$

Согласно формулам тригонометрии, выражение в скобках равно $\cos(\omega_0 t + \alpha)$. Окончательно приходим к общему решению уравнения гармонических колебаний в виде

$$\boxed{x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha)}. \quad (24.23)$$

Величина A называется **амплитудой колебания**, а α — **начальной фазой**. Вся комбинация $\omega_0 t + \alpha$ называется **фазой колебания**. Выражения (24.19) и (24.23) совершенно эквивалентны, так что мы для простоты можем пользоваться любым из них. Оба решения являются периодическими функциями времени. Действительно, синус и косинус периодичны с периодом 2π . Поэтому различные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через промежуток времени t^* , за который фаза колебания получает приращение, кратное 2π :

$$\omega_0(t + t^*) + \alpha = \omega_0 t + \alpha + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (24.24)$$

Отсюда следует, что $t^* = 2\pi n / \omega_0$. Наименьшее из этих значений

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0}} \quad (24.25)$$

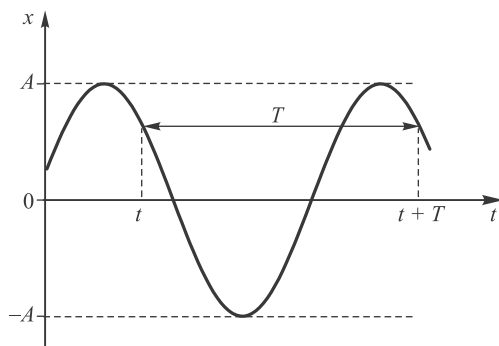


Рис. 24.7. Временная развертка гармонического колебания с периодом T

называется **периодом колебаний** (рис. 24.7), а ω_0 — **круговой (циклической) частотой**. Равномерное движение по окружности также можно рассматривать как колебательный повторяющийся процесс. В этом случае ω_0 совпадает с угловой скоростью вращения. Используют также и **частоту** колебаний:

$$\nu_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}. \quad (24.26)$$

Частота ν_0 — это число колебаний, которое совершает система в единицу времени (в СИ — за секунду). Соответственно круговая частота равна числу колебаний за 2π секунд. В СИ единицей частоты (круговой частоты) являются обратные секунды, для которых введено специальное название — герц ($1 \text{ Гц} = 1/\text{с}$).

Итак, если система в момент времени t характеризуется значением переменной $x(t)$, то же самое значение переменная будет иметь через промежуток времени $T = 2\pi/\omega_0$: $x(t) = x(t + T)$. Это же значение, естественно, повторится через время $2T, 3T$ и т. д.

В общем решении входят две произвольные постоянные (C_1, C_2 или A, α , значения которых должны определяться двумя **начальными условиями**. Обычно (хотя и необязательно) их роль играют начальные значения переменной $x(0)$ и ее производной $\dot{x}(0)$.

Приведем пример. Пусть решение уравнения гармонических колебаний (24.19) описывает пружинный маятник. Значения произвольных постоянных зависят от способа, каким мы вывели маятник из состояния равновесия. Например, мы оттянули пружину на расстояние x_0 и отпустили шарик без начальной скорости. В этом случае $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$. Подставляя $t = 0$ в (24.19), находим: $x(0) = x_0 = C_2$. Решение, таким образом, имеет вид

$$x(t) = C_1 \sin \omega_0 t + x_0 \cos \omega_0 t.$$

Скорость груза находим дифференцированием:

$$\dot{x}(t) = C_1 \omega_0 \cos \omega_0 t - x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t.$$

Подставляя сюда $t = 0$, находим вторую постоянную: $\dot{x}(0) = C_1 \omega_0 = 0 \rightarrow C_1 = 0$. Окончательно

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t.$$

Сравнивая это уравнение с (24.23), находим, что x_0 — это амплитуда колебаний, а его начальная фаза равна нулю: $\alpha = 0$.

Выведем теперь маятник из равновесия другим способом. Ударим по грузу, так что он приобретет начальную скорость v_0 . Имеем тогда другие начальные условия: $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$. Так как $x(0) = C_2 = 0$, то наше решение имеет вид $x(t) = C_1 \sin \omega_0 t$. Скорость груза будет изменяться по закону $\dot{x}(t) = C_1 \omega_0 \cos \omega_0 t$. Подставим сюда $t = 0$: $\dot{x}(0) = v_0 = C_1 \omega_0, C_1 = v_0 / \omega_0$. Окончательно получаем

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t = \frac{v_0}{\omega_0} \cos \left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right),$$

так что амплитуда колебаний равна $A = v_0 / \omega_0$, а начальная фаза $\alpha = -\pi/2$.

В общем случае, когда маятник отводится на расстояние x_0 и отпускается с начальной скоростью v_0 , связь начальных условий с амплитудой колебаний и начальной фазой имеет вид

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \quad \text{и} \quad \text{tg } \alpha = -\frac{v_0}{x_0 \omega_0}. \quad (24.27)$$

Дифференцируя решение (24.23) по времени, находим зависимость от времени скорости и ускорения маятника:

$$\begin{cases} v(t) = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}), \\ a(t) = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi). \end{cases} \quad (24.28)$$

Видно, что скорость и ускорение также изменяются по гармоническому закону, причем амплитуда скорости равна $A\omega_0$, а амплитуда ускорения — $A\omega_0^2$. Скорость опережает смещение по фазе на $\pi/2$, ускорение находится в противофазе по отношению к смещению. Это означает, что в тот момент, когда смещение достигает наибольшего значения, ускорение достигает наибольшего по величине отрицательного значения и наоборот.

Задача 24.1. В очень грубом приближении Землю можно представить себе в виде твердого шара радиусом $R_{\text{З}} = 6,38 \cdot 10^6$ м и массой $M_{\text{З}} = 6,0 \cdot 10^{24}$ кг. Пусть в нем пробурили узкую скважину радиальную скважину, проходящую через центр Земли, и уронили в нее камешек без начальной скорости. При каком сферически симметричном распределении плотности Земли $\rho(r)$ камешек будет совершать гармонические колебания? Найти для этого случая период колебаний и амплитуду скорости камешка. Соппротивлением воздуха и вращением Земли пренебречь.

Решение. Всемирный закон тяготения Ньютона аналогичен закону Кулона в электростатике. Поэтому на камешек, находящийся на расстоянии r от центра Земли, будет действовать сила притяжения только той части массы Земли, которая находится внутри сферы радиусом r . Эта масса определяется соотношением

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r) r^2 dr, \quad M(R_{\text{З}}) = M_{\text{З}}. \quad (24.29)$$

Уравнение движения камешка имеет вид

$$m\ddot{r} = -G \frac{M(r)m}{r^2}. \quad (24.30)$$

Уравнение гармонических колебаний с частотой $\omega_{\text{З}}$ (24.18) получается отсюда при линейной зависимости правой части (24.30) от расстояния до центра Земли:

$$G \frac{M(r)}{r^2} = \omega_{\text{З}}^2 r. \quad (24.31)$$

Умножая обе части (24.31) на r^2 и используя (24.29), приходим к соотношению

$$4\pi G \int_0^r \rho(r)r^2 dr = \omega_{\text{З}}^2 r^3. \quad (24.32)$$

Дифференцируя (24.32) по r , получаем, что плотность Земли должна быть постоянной:

$$\rho(r) = \rho_{\text{З}} = \frac{3}{4\pi G} \omega_{\text{З}}^2. \quad (24.33)$$

Постоянная плотность связана с массой Земли и ее радиусом соотношением $M_{\text{З}} = \rho_{\text{З}}(4\pi R_{\text{З}}^3/3)$. Отсюда получаем

$$\omega_{\text{З}} = \sqrt{\frac{GM_{\text{З}}}{R_{\text{З}}^3}} = \sqrt{\frac{g}{R_{\text{З}}}}, \quad (24.34)$$

где $g = GM_{\text{З}}/R_{\text{З}}^2$ — ускорение свободного падения на поверхности Земли. Теперь находим период колебаний камешка, упавшего в скважину:

$$T_{\text{З}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{З}}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_{\text{З}}}{g}}. \quad (24.35)$$

Подставляем сюда численные данные:

$$T_{\text{З}} = 2\pi \sqrt{\frac{6,38 \cdot 10^6}{9,81}} = 0,81 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 1 \text{ ч } 24 \text{ мин.} \quad (24.36)$$

Амплитуда колебаний камешка равна радиусу Земли, значит, амплитуда скорости

$$v_{\text{З}} = \omega_{\text{З}} R_{\text{З}} = \sqrt{g R_{\text{З}}}. \quad (24.37)$$

Такую скорость набирает камешек к моменту прохождения центра Земли. Мы видим, что эта скорость совпадает с первой космической скоростью v_1 (см. т. 1, гл. 6, разд. 6.6), численное значение которой $v_1 = 7,9$ км/с. Таким образом, период T_1 вращения спутника, летящего вблизи поверхности Земли, равен периоду колебаний камешка, падающего в скважине, проходящей через центр Земли:

$$T_1 = \frac{2\pi R_{\text{З}}}{v_1} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{З}}} = T_{\text{З}}. \quad (24.38)$$

Конечно, это равенство — следствие предположения об однородности плотности нашей планеты, что заведомо не так. При другом законе зависимости плотности $\rho(r)$ от расстояния колебания падающего камешка не будут гармоническими и их период будет отличаться от периода обращения спутника вокруг Земли. ■

24.3 Сохранение энергии при гармонических колебаниях

Умножим уравнение гармонических колебаний (24.18) на скорость изменения переменной x :

$$\dot{x} \ddot{x} + \omega_0^2 \dot{x} x = 0. \quad (24.39)$$

Каждое из слагаемых можно представить как производную:

$$\dot{x} \ddot{x} = \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}^2}{2}, \quad \dot{x} x = \frac{d}{dt} \frac{x^2}{2}.$$

С учетом этого уравнения (24.39) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \omega_0^2 \frac{x^2}{2} \right) = 0. \quad (24.40)$$

Отсюда следует, что величина в скобках не зависит от времени, т. е. сохраняется в процессе колебаний:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \omega_0^2 \frac{x^2}{2} = \text{const.} \quad (24.41)$$

Для выяснения физического смысла сохраняющейся величины применим эти соотношения к пружинному маятнику, когда $\omega_0^2 = k/m$. Видим, что уравнение (24.41) можно записать в виде суммы кинетической энергии груза и потенциальной энергии сжатой пружины:

$$\boxed{\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const.}} \quad (24.42)$$

Таким образом, найденный закон сохранения есть не что иное, как **закон сохранения полной энергии колебательной системы**. Аналогично для электромагнитного контура переменная $x = q$, $\dot{x} = \dot{q} = I$ и $\omega_0^2 = 1/LC$. В этом случае соотношение (24.41) принимает вид

$$\boxed{\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \text{const.}} \quad (24.43)$$

Первый член — энергия магнитного поля в катушке, второй — энергия электрического поля в конденсаторе. Снова мы получили, что сохраняется полная энергия в системе.

Возвращаясь к общей форме закона сохранения энергии (24.41) и подставляя сюда общее решение (24.23), получаем **законы изменения во времени кинетической и потенциальной энергий** (или их аналогов) и выражение для **сохраняющейся полной энергии колебаний**:

$$\boxed{\begin{aligned} T &= \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{A^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha), \\ U &= \frac{\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{A^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha), \\ W &= T + U = \frac{A^2\omega_0^2}{2}. \end{aligned}} \quad (24.44)$$

Отсюда следует, что:

- кинетическая и потенциальная энергии — периодические функции времени с периодом, равным половине периода колебаний;
- кинетическая и потенциальная энергии колеблются в противофазе — когда кинетическая энергия достигает максимума, значение потенциальной энергии минимально и наоборот;
- в колебательной системе энергия периодически «перекачивается» из одной формы в другую, а полная энергия $W = T + U$ сохраняется;

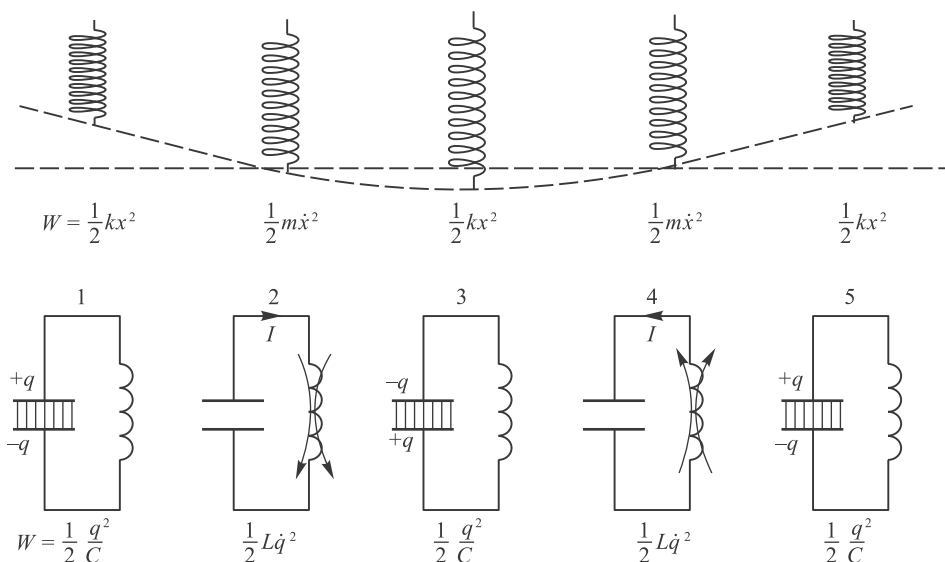


Рис. 24.8. Различные стадии изменения во времени кинетической и потенциальной энергий в колебательной системе

- полная энергия колебаний пропорциональна квадрату их амплитуды и квадрату частоты.

Сказанное проиллюстрировано на рис. 24.8, на котором показаны различные стадии изменения кинетической и потенциальной энергий для пружинного маятника и электромагнитного контура.

24.4 Сложение однонаправленных колебаний

Может случиться так, что осциллятор принимает участие в двух одинаково направленных колебаниях с разными амплитудами, частотами и начальными фазами. Рассмотрим сложение таких колебаний.

Сложение колебаний с одинаковыми частотами

Для простоты рассмотрим сначала случай, когда частоты складываемых колебаний одинаковы. Общие решения складываемых гармонических колебаний имеют вид

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2), \end{aligned} \quad (24.45)$$

где x_1, x_2 — переменные, описывающие колебания, A_1, A_2 — их амплитуды, а α_1, α_2 — начальные фазы. Результирующее колебание $x = x_1 + x_2$ удобно найти с помощью **векторной диаграммы**. В этом методе используется аналогия между вращением и колебательным процессом.

Возьмем общее решение (24.23) для гармонического колебания. Выберем ось Ox . Из точки O отложим вектор длиной A , образующий с осью Ox угол α . Если

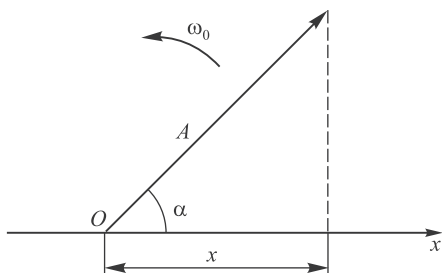


Рис. 24.9. Векторная диаграмма гармонического колебания

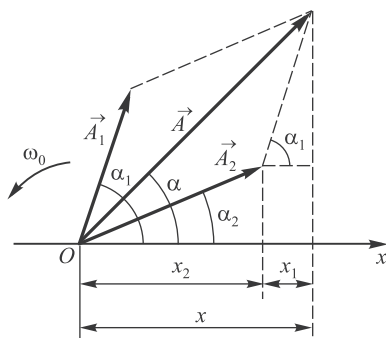


Рис. 24.10. Векторная диаграмма для сложения одинаково направленных колебаний одинаковой частоты

привести этот вектор во вращение с угловой скоростью ω_0 , то проекция конца этого вектора будет перемещаться по оси Ox от $+A$ до $-A$, причем величина проекции будет изменяться по закону

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (24.46)$$

Таким образом, проекция конца вектора на ось Ox будет совершать гармонические колебания с амплитудой, равной длине вектора, с круговой частотой, равной угловой скорости вращения вектора, и с начальной фазой, равной углу, образуемому вектором с осью в начальный момент времени (рис. 24.9).

Применим теперь эту технику к сложению колебаний (24.45). Представим оба колебания векторами \vec{A}_1 и \vec{A}_2 . Возьмем их векторную сумму $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ (рис. 24.10). Проекция \vec{A} на ось Ox равна сумме проекций $x = x_1 + x_2$. Таким образом, вектор \vec{A} представляет собой результирующее колебание. Этот вектор вращается с той же угловой скоростью ω_0 , так что результирующее движение будет гармоническим колебанием с частотой ω_0 , амплитудой A и начальной фазой α . Имеем согласно теореме косинусов

$$\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2), \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}. \end{aligned} \quad (24.47)$$

В частности, если фазы складываемых колебаний равны или различаются на четное кратное π , т. е. $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi n$, то амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд $A = A_1 + A_2$. Если складываемые колебания находятся в противофазе ($\alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi n + \pi$), то $A = |A_1 - A_2|$.

Биения

В этом разделе мы рассмотрим случай сложения одинаково направленных гармонических колебаний с разными частотами. На практике особый интерес представляет случай, когда складываемые колебания мало различаются по частоте. Как мы увидим, в результате сложения этих колебаний получаются колебания с

периодически изменяющейся амплитудой. Периодические изменения амплитуды колебаний, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются *биениями*.

Для простоты рассмотрим случай, когда амплитуды складываемых колебаний равны A , а начальные фазы обоих колебаний равны нулю. Частоты складываемых колебаний равны соответственно ω_1 и ω_2 . Итак,

$$x_1 = A \cos \omega_1 t, \quad x_2 = A \cos \omega_2 t. \quad (24.48)$$

Складываем эти выражения и учитываем известную формулу тригонометрии:

$$\begin{aligned} x &= A (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = \\ &= 2A \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right). \end{aligned} \quad (24.49)$$

Второй сомножитель в правой части (24.49) описывает гармоническое колебание со средней частотой $\omega_{\text{ср}} = (\omega_1 + \omega_2)/2$. Если частоты ω_1 и ω_2 близки, т. е. разность частот мала ($\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_{\text{ср}}$), то первый сомножитель меняется медленно по сравнению со вторым. Поэтому результирующее колебание

$$x = \left(2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega_{\text{ср}} t \quad (24.50)$$

можно рассматривать как гармоническое колебание с частотой $\omega_{\text{ср}}$, эффективная амплитуда $A_{\text{эф}}$ которого изменяется со временем (рис. 24.11):

$$A_{\text{эф}} = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|. \quad (24.51)$$

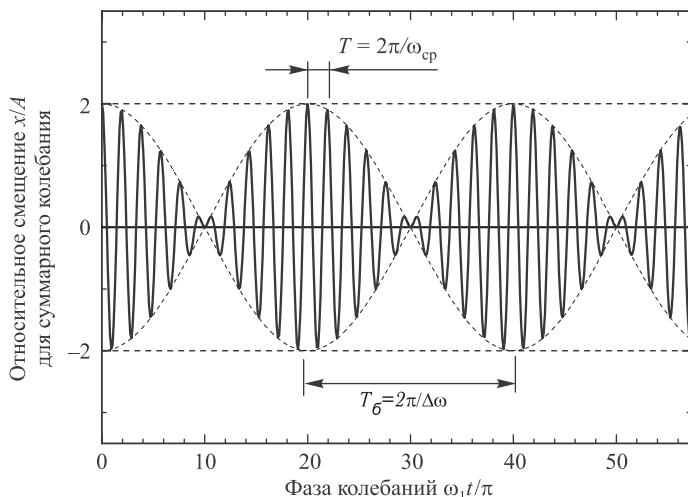


Рис. 24.11. Биения при сложении колебаний с близкими частотами: $\omega_2 = 1,1\omega_1$. Тонкие пунктирные кривые показывают зависимость от времени эффективной амплитуды колебаний $\pm A_{\text{эф}}(t) = \pm 2A \cos(\Delta\omega t/2)$

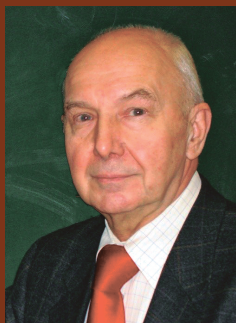
[. . .]

Данный учебник завершает двухтомное издание «Основы физики» и входит в единый комплект вместе со сборником задач и упражнений тех же авторов. Предыдущее издание учебника в составе других учебных материалов выдвинуто на соискание премии Правительства Российской Федерации в области образования. Настоящее издание переработано и существенно дополнено.

Во втором томе, помимо традиционных разделов, включающих колебания и волны, основы квантовой механики, строения вещества и ядерной физики, представлены многие другие интересные темы, которые обычно отсутствуют в учебниках: нелинейные колебания и колебания в живой природе, макроскопические квантовые явления, сверхтекучесть и сверхпроводимость, контактные явления (в том числе контакты сверхпроводников), основы физики элементарных частиц и последние достижения космологии.

Учебник соответствует программе дисциплины «Физика» для естественнонаучных и технических университетов и не имеет аналогов по фундаментальности подхода, с одной стороны, и по живости и доступности изложения – с другой.

КАЛАШНИКОВ Николай Павлович. Профессор, доктор физико-математических наук, заслуженный деятель науки РФ, заведующий кафедрой общей физики Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ» (НИЯУ МИФИ).



Автор более 380 научных трудов и 14 монографий.

С 2012 г. директор агентства по аккредитации образовательных программ инженерных специальностей.

Основные направления научных исследований профессора Калашникова – ядерная физика, взаимодействия быстрых заряженных частиц с веществом, физика твердого тела в экстремальных состояниях.

СМОНДЫРЕВ Михаил Александрович. Профессор, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований (ОИЯИ, Дубна), профессор Московского авиационного института (Национального исследовательского университета).



В сферу научных интересов входят вопросы теории элементарных частиц и твердого тела. Автор и переводчик целого ряда научно-популярных книг и статей.

Лауреат премии Ленинского комсомола и премий ОИЯИ – Международной межправительственной научно-исследовательской организации.