Л. В. Колобашкина

Основы теории игр

Издательство БИНОМ

МАТЕМАТИКА

Л. В. Колобашкина

Основы теории игр

Учебное пособие

3-е издание, исправленное и дополненное

Рекомендовано
УМО по образованию в области прикладной математики
и управления качеством в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению 231300 –
Прикладная математика

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний

УДК 519.83(075)
ББК 22.193я7
К60

Рецензенты:
доктор физ-мат. наук, проф., зав. кафедрой А. Л. Калабин,
доктор техн. наук *Н. Н. Филатова*
(Тверской государственный технический университет,
кафедра «Программное обеспечение
вычислительной техники»),
кандидат техн. наук, доцент кафедры вычислительной
техники МЭИ *И. Н. Андреева*

Колобашкина Л. В.

К60 Основы теории игр : учебное пособие / Л. В. Колобашкина. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. — 195 с. : ил.

ISBN 978-5-9963-1716-5

В пособии изложены основные положения и сведения из теории игр, подробно рассмотрены методы выбора оптимальных стратегий поведения в антагонистических и неантагонистических конфликтах. Приведены критерии определения оптимальных стратегий в «играх с природой». Рассмотрены методы принятия решений в антагонистических и неантагонистических позиционных играх с полной и неполной информацией. Рассмотрены принципы оптимальности для кооперативных игр. Все представленные методы сопровождаются подробно рассмотренными примерами. Доступность изложения материала делает знакомство с принципами рационального поведения в конфликтах привлекательным для широкого круга читателей.

Пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям «Прикладная математика», «Прикладная математика и информатика», «Математические методы в экономике».

УДК 519.83(075)
ББК 22.193я7

Учебное издание

Колобашкина Любовь Викторовна

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИГР

Учебное пособие

Ведущие редакторы *М. С. Стригунова, И. А. Маховая*. Редактор *Н. А. Шихова*
Технический редактор *Е. В. Денюкова*. Корректор *Е. Н. Клитина*
Компьютерная верстка: *В. А. Носенко, С. А. Янковая*

Подписано в печать 19.12.13. Формат 60 × 90/16.
Усл. печ. л. 12,5. Тираж 1000 экз. Заказ

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272, e-mail: binom@Lbz.ru, http://www.Lbz.ru

---

ISBN 978-5-9963-1716-5

Оглавление

Светлой памяти моего отца
Колобашкина Виктора Михайловича
посвящается эта книга

ВВЕДЕНИЕ

Издавна люди сталкивались с проблемой принятия решений в тех или иных ситуациях. Недаром считается, что «качество принятых решений определяет качество жизни». Повседневно сталкиваясь с необходимостью выбирать то или иное решение, человек использует при этом имеющиеся в его распоряжении опыт, логические возможности, проводит различные рассуждения, использует ассоциации, вспоминает аналогичные случаи, делает прогнозы, предположения, догадки, прибегает к интуиции. При этом естественно стремление к таким решениям, которые приводят к наилучшим результатам. Такой выбор принято называть *оптимальным*. До поры до времени, в частности если выбор в конкретной ситуации касается интересов одного человека, решения могут приниматься без специального математического анализа. В случае же, когда последствия неправильно принятых решений могут затронуть интересы уже целых коллективов, структурных подразделений, отраслей, а то и городов, приводится в действие сложная система математических расчетов. Эти предварительные расчеты помогут избежать длительного и дорогостоящего поиска правильного решения «наощупь».

Чем сложнее организуемое мероприятие, чем больше вкладывается в него материальных средств, чем шире спектр его возможных последствий, тем менее допустимы так называемые «волевые» решения, не опирающиеся на научный расчет, и тем большее значение получает совокупность научных методов, позволяющих заранее оценить последствия каждого решения, заранее отбросить недопустимые варианты и рекомендовать те, которые представляются наиболее удачными [1].

Математическими расчетами, облегчающими принятие правильных решений, занимается раздел прикладной математики — исследование операций.

Исследование операций — это теория математических моделей принятия оптимальных решений и практика их использования. Согласно шутливому определению Т. Л. Саати, исследование операций — это искусство давать плохие ответы на те практические вопросы, на которые даются еще худшие ответы другими способами [2]. Это говорит о том, что практические ситуации, в которых приходится принимать решение, часто бывают настолько сложными и важными, что даже незначительная помощь со стороны математических методов оказывается весьма существенной.

Особенно сложные управленческие проблемы возникают в сфере социально-экономических отношений. Обычно развитие социально-экономического явления зависит от действий многих лиц, каждое из которых лишь частично контролирует ситуацию. Лица, принимающие решения, имеют свои интересы, часто не полностью выявленные и представленные с некоторой долей неопределенности. Эти интересы могут совпадать (возможно, частично), что ведет к сотрудничеству и кооперации. Но они могут и противоречить друг другу (возможно, частично), что ведёт к соперничеству и конфликту [3].

При решении ряда практических задач (в области экономики, военного дела и т. д.) приходится анализировать ситуации, в которых сталкиваются две и более враждующие стороны, преследующие различные цели. Причем результат любого мероприятия каждой из сторон зависит от того, какой образ действий выберет противник. Такие ситуации называются *конфликтными ситуациями*.

Исследованием операций в условиях конфликта занимается *теория игр*.

Теория игр — математическая теория конфликтных ситуаций. Чтобы сделать возможным математический анализ конфликтной ситуации, необходимо построить упрощенную схематизированную модель ситуации, которую будем называть игрой. Заметим, что понятия *игра* и *конфликт* — синонимы.

В игре могут сталкиваться интересы двух и более сторон. *Целью* каждого участника игры является получение возможного большего выигрыша.

Теория игр занимается исследованием математических моделей конфликтов и их формальным решением, что позволяет:

- смоделировать процесс и возможные результаты будущей игры еще до ее фактического начала;
- по результатам моделирования будущей игры принять решение о целесообразности участия и оптимальном поведении в реальном конфликте.

Другими словами, теория игр дает математический *прогноз* конфликта.

Реальные конфликтные ситуации приводят к различным видам игр. В зависимости от вида игры разрабатывается и метод ее решения.

Классификация игр осуществляется по целому ряду направлений [4].

- **По количеству игроков:** парные игры и игры *n* игроков. Наибольшие успехи достигнуты при изучении парных игр. Трудности решения игровых задач с увеличением количества игроков повышаются.
- **По количеству стратегий:** конечные и бесконечные. Если каждый из игроков имеет конечное число возможных стратегий, то игра называется *конечной*. Если хотя бы один из игроков имеет бесконечное число возможных стратегий, то такая игра называется *бесконечной*.
- **По характеру взаимоотношений:** бескоалиционные, коалиционные, кооперативные. В *бескоалиционных* играх игроки не имеют права образовывать коалиции в отличие от *коалиционных* игр. В *кооперативной* игре коалиции определены заранее.
- **По характеру выигрышей:** игры с нулевой суммой (или антагонистические) и игры с ненулевой суммой (неантагонистические). В *играх с нулевой суммой* сумма выигрышей игроков в каждой партии равна нулю, цели игроков в ней прямо противоположны: выигрыш одного игрока происходит только за счет проигрыша другого. В *играх с ненулевой суммой* критерии для игроков различны, сумма выигрышей нулю не равна.
- **По количеству ходов**: одношаговые и многошаговые. В *одношаговых* играх каждый игрок делает только один ход, а далее идет распределение выигрышей. *Многошаговые* игры делятся на позиционные, стохастические, дифференциальные. В *позиционных* играх может быть несколько игроков, каждый из которых может последовательно во времени делать несколько ходов. Выигрыши определяются в зависимости от исходов игры. Если в игре производятся ходы, приводящие к выбору определенных позиций, причем имеется определенная вероятность возврата на предшествующую позицию, такая игра называется *стохастической*. Если в многошаговой игре допускается делать ходы непрерывно и действия игроков описываются дифференциальными уравнениями, такая игра называется *дифференциальной*.

- **В зависимости от состояния информации:** игры с полной и неполной информацией. Если на каждом шаге игры каждому игроку известно, какие выборы сделаны игроками ранее, то это игра *с полной информацией*. Если игроку не все известно о предыдущих выборах, то речь идет об игре *с неполной информацией*.
- **По виду функций выигрыша:** матричные, биматричные, непрерывные. *Матричная* игра — это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой выигрыши первого игрока равны проигрышам второго и наоборот; задается в виде одной матрицы. *Биматричная* игра — это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока сосредоточены в матрице игры данного игрока; данный вид игр задается двумя матрицами. *Непрерывной* считается игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной в зависимости от стратегий.

Данное учебное пособие состоит из четырех глав.

Глава 1 посвящена методам принятия решений в антагонистических конфликтах. В этой главе вводятся основные понятия теории матричных игр, рассматриваются вопросы составления модели игры, уменьшения размерности задачи путем применения отношений доминирования, излагаются способы определения равновесных ситуаций в «чистых» стратегиях, приводятся аналитические, итерационные и графические методы определения оптимальных смешанных стратегий в зависимости от размерности задачи, рассматриваются вопросы практического применения полученных результатов.

В ряде задач функция выигрыша зависит от неопределенных факторов, к которым можно отнести погодные условия, состояние рынка, курс валюты, инфляцию, психоэмоциональное состояние лица, принимающего решения, и т. д. Рассчитывая на «худший» вариант, этот неопределенный фактор, который называют «природой», отождествляют со стратегией противника, имеющего противоположные интересы. Методы принятия решений в играх с «природой», являющихся разновидностью антагонистических игр, рассматриваются в главе 2.

В главе 3 приводятся методы поиска оптимальных решений в неантагонистических конфликтных ситуациях, рассматриваются вопросы редуцирования размерности задачи в зависимости от целевого критерия.

Глава 4 посвящена многошаговым процессам принятия решений. В ней описывается структура позиционной игры, рассматриваются вопросы ее нормализации, излагаются методы принятия решений в антагонистических и неантагонистических позиционных играх с полной и неполной информацией, приводятся практические примеры решения организационно-управленческих задач с помощью позиционных игр.

В главе 5 приводятся базовые понятия теории кооперативных игр, дается математическое обоснование для выделения устойчивых коалиций в кооперативных играх на основе взаимных экономических интересов. Рассматриваются варианты распределения выигрыша между игроками коалиции. Излагаются принципы оптимальности для кооперативных игр — С-ядро, HM-решение и вектор Шепли.

В пособии приняты следующие обозначения: новые понятия выделены жирным курсивом; матрицы в общем виде приводятся в круглых скобках, а матрицы с числовыми значениями — в квадратных.

Книга рассчитана, в первую очередь, на практика, впервые знакомящегося с предметом. Доступность изложения материала делает знакомство с принципами рационального поведения в конфликтах привлекательным для широкого круга читателей.

Данное пособие написано на основе курса лекций, читаемого автором в Московском инженерно-физическом институте (НИЯУ МИФИ).

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ КОНФЛИКТАХ

1.1. Матричные игровые задачи. Составление модели игры

Наибольшее практическое значение имеют парные игры, поэтому основное внимание уделим рассмотрению этого класса игр.

Развитие игры во времени представляется состоящим из ряда последовательных «ходов». ***Ходом*** в теории игр называется выбор одного из предусмотренных правилами игры действий и его осуществление. Ходы бывают личные и случайные. ***Личным ходом*** называется сознательный выбор игроком одного из возможных вариантов действий и его осуществление. ***Случайным ходом*** называется выбор из ряда возможных альтернатив, осуществляемый некоторой незаинтересованной средой — назовем ее ***природой***. Для каждого случайного хода правила игры определяют распределение вероятностей возможных исходов [1].

Задача теории игр — рекомендовать игрокам определенные «стратегии» при выборе их личных ходов.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе этого игрока, в зависимости от ситуации, сложившейся в ходе игры.

Целью теории игр является определение «оптимальной стратегии» для каждого игрока.

Оптимальной стратегией игрока называется такая стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш. При выборе этой стратегии считается, что противник делает все, чтобы помешать игроку добиться своей цели.

При постановке игровых задач должны быть определены следующие условия:

- стороны, принимающие решения;
- множество всех возможных действий (стратегий);
- выигрыши сторон для каждой ситуации.

Рассмотрим игру двух игроков, скажем А и В, каждый из которых имеет конечное число стратегий. Предположим, игрок А имеет m стратегий: $A_1, A_2, ..., A_m$, а игрок В — n стратегий: $B_1, B_2, ..., B_n$. Каждой паре стратегий (A_i, B_j) ставится в соответствие число a_{ij}, выражающее выигрыш игрока А за счет игрока В (если $a_{ij} > 0$) или проигрыш игрока А игроку В (если $a_{ij} < 0$), когда А применяет свою стратегию A_i, а В — стратегию B_j.

В том случае, когда цели двух конкурирующих сторон являются прямо противоположными, для них можно определить единый критерий: одна из сторон будет заинтересована в увеличении значения этого критерия, а другая — в его уменьшении.

В случае единого критерия данная игра полностью может быть описана матрицей размерности $m \times n$, которая называется *матрицей игры* или *платежной матрицей* (отсюда следует и название данного класса игр — *матричные игры*).

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{matrix}.$$

Рассмотрим пример. Пусть матрица игры имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ -10 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сторона А имеет две стратегии, а сторона В — три стратегии. Если игрок А применяет свою стратегию A_2, а В — стратегию B_3, то, следовательно, игрок А выигрывает 1 у. е., а игрок В проигрывает игроку А 1 у. е. Если игрок А применяет свою стратегию A_1, а В — стратегию B_2, то, следовательно, игрок А проигрывает 6 у. е. игроку В, а игрок В выигрывает 6 у. е. у игрока А.

В данной игре один игрок выигрывает ровно столько, сколько проигрывает другой, т. е. сумма выигрышей игроков равна нулю. Поэтому игры данного класса называют *играми с нулевой суммой*.

Ценой игры называется средний выигрыш игрока А.

Рассмотрим несколько примеров построения платежных матриц.

Пример 1.1. Пусть игроки А и В одновременно показывают от одного до трех пальцев. Выигрыш или проигрыш определяется числом показанных пальцев. Если сумма числа пальцев четная, то А получает от В платеж (в у. е.), равный этой сумме, если сумма пальцев нечетная, то А платит В. Определить оптимальные стратегии поведения сторон.

Очевидно, что у каждого игрока по три стратегии: показывать один, два или три пальца. Элементы платежной матрицы в данной задаче могут быть рассчитаны по формуле

$$a_{ij} = (i + j)(-1)^{i+j},$$

и матрица размерности 3 × 3 примет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Пример 1.2. Выбор ассортимента товаров [2].

На базе торговой организации имеется n типов одного из товаров ассортиментного минимума (к примеру, n сортов яблок). В магазин должны быть завезены один или несколько типов данного товара. Если товар j-го типа ($j = 1, ..., n$) будет пользоваться спросом, то магазин от его реализации получит прибыль p_j у. е. Если же этот товар не будет пользоваться спросом, то магазин понесет убытки от его хранения, порчи и т. д., которые составят l_j у. е. (табл.1.1).

Таблица 1.1

Доход/Убыток \ Типы товара	1	2	3	4	5
Доход от реализации p_j (у. е.)	32	32	32	32	32
Убыток при хранении l_j (у. е.)	16	8	4	4	2

Требуется выбрать типы товара, которые целесообразно завести в магазин.

В данной задаче в качестве одной из конфликтующих сторон выступает магазин (игрок А), а в качестве другой — покупательский спрос (игрок В). Каждый из игроков имеет по n стратегий. Завоз i-го товара — стратегия A_i игрока А, спрос на j-й товар — стратегия B_j игрока В.

В данном случае платежная матрица игры будет квадратной матрицей размерности $n \times n$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 32 & -16 & -16 & -16 & -16 \\ -8 & 32 & -8 & -8 & -8 \\ -4 & -4 & 32 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & 32 & -4 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 32 \end{bmatrix}.$$

Пример 1.3. Истребитель (И) атакует один из бомбардировщиков Б$_1$ или Б$_2$, летящих один за другим. Вооружение истребителя позволяет ему обстрелять один из бомбардировщиков. Вероятность поражения бомбардировщика при этом составляет $P_1 = 0.8$. На одном из бомбардировщиков находится бомба, однако на каком — не известно. Цель истребителя — сбить бомбардировщик с бомбой. Подлетая к бомбардировщику, истребитель подвергается обстрелу и может быть сбит с вероятностью $P_2 = 0.6$. После этого он обстреливает первый бомбардировщик или летит ко второму, подвергается обстрелу бомбардировщиком Б$_2$ и обстреливает его.

Требуется определить оптимальные стратегии поведения сторон, если истребитель (сторона А) стремится максимизировать вероятность поражения бомбардировщика с бомбой, а бомбардировщики (сторона В) стремятся эту вероятность минимизировать.

В распоряжении стороны А (истребитель) — 2 стратегии:

A_1 — обстреливать первый бомбардировщик;

A_2 — обстреливать второй бомбардировщик.

В распоряжении стороны В (бомбардировщики) также 2 стратегии:

B_1 — поместить бомбу на первый бомбардировщик;

B_2 — поместить бомбу на второй бомбардировщик.

Элементы платежной матрицы — вероятности поражения бомбардировщика с бомбой.

Очевидно, что если истребитель будет стрелять по бомбардировщику без бомбы, соответствующий элемент платежной матрицы будет равен нулю.

В результате платежная матрица примет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (1-P_2)P_1 & 0 \\ 0 & (1-P_2)^2 P_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.32 & 0 \\ 0 & 0.128 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что цель данного раздела – сосредоточить внимание на построении платежных матриц, а методы решения матричных задач будут приведены ниже.

1.2. Сокращение размерности игровой задачи

Прежде чем приступить к решению игровой задачи, надо проанализировать платежную матрицу на предмет сокращения ее размерности. При анализе игровой матрицы сразу можно выделить стратегии, являющиеся дублирующими или заведомо невыгодными для сторон.

В игре i-я стратегия ***дублирует*** j-ю стратегию, если

$$a_{il} = a_{jl} \text{ для } \forall l \in [1, m] \text{ или } a_{li} = a_{lj} \text{ для } \forall l \in [1, n].$$

Если в матрицу игры входят дублирующие стратегии, то из них оставляется любая одна, а остальные — удаляются.

К примеру, рассмотрим игру со следующей платежной матрицей:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array}.$$

Как видно из матрицы, стратегии A_3, A_5 являются дублирующими, и одна из них, скажем A_5, из матрицы **A** может быть удалена:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}.$$

Определение заведомо невыгодных стратегий производится с помощью ***отношений доминирования***, которые заключаются в следующем.

Если каждой из стратегий стороны А поставить в соответствие вектор-строку матрицы **A**, то стратегия A_i будет доминировать стратегию A_j при выполнении следующего условия: $a_{il} \geq a_{jl}$ для $\forall l \in [1, n]$. В этом случае стратегия A_j не будет использоваться, и соответствующая строка из платежной матрицы удаляется.

Если каждой из стратегий стороны В поставить в соответствие вектор-столбец матрицы **A**, то стратегия B_j будет доминировать над стратегией B_i при выполнении следующего условия: $a_{li} \leq a_{lj}$ для $\forall l \in [1, m]$. В этом случае стратегия B_j не будет использоваться, и соответствующий столбец из платежной матрицы удаляется.

Элементы i-й строки матрицы **A** являются выигрышами стороны А при применении ею своей i-й стратегии. Если сравнить стратегию A_1 со стратегией A_3, можно заметить, что независимо от того, какую стратегию применяет сторона В, выигрыш стороны А при применении ею своей третьей стратегии всегда будет больше, чем при использовании первой стратегии. Следовательно, стратегия A_1 невыгодна по сравнению со стратегией A_3, и соответствующая строка может быть удалена из платежной матрицы. Аналогично, если сравнить стратегию A_2 со стратегией A_4, можно заметить, что A_4 невыгодна по сравнению с A_2, и соответствующая строка может быть удалена. Следовательно, мы имеем:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 4 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 6 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \end{array}.$$

Рассмотрим данную игру с позиции стороны B. Для стороны B элементы j-го столбца платежной матрицы являются проигрышами при применении ею своей стратегии B_j. Естественно, выгодной для B является та стратегия, которая дает ей меньший проигрыш независимо от образа действий стороны A. Если сравнить стратегии B_2 и B_3, то видно, что независимо от того, какую стратегию применит сторона A, проигрыш стороны B будет больше при стратегии B_3, и, следовательно, соответствующий столбец может быть удален из платежной матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \end{array}.$$

Таким образом, из платежной матрицы удаляются дублирующие стратегии (кроме одной), доминируемые строки и доминирующие столбцы. Порядок удаления строк и столбцов значения не имеет.

Пример 1.4. Рассмотрим применение отношений доминирования к матрице

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 & 3 & 6 \\ 6 & 1 & 10 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 10 \\ 3 & 2 & 8 & 1 & 4 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \end{array}.$$

1. Столбец 3 — доминирующий по отношению к столбцу 1, а столбцы 2 и 5 — доминирующие по отношению к столбцу 4.

Преобразованная матрица:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} B_1 & B_4 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 0 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \end{array}.$$

[. . .]

Любовь Викторовна Колобашкина, кандидат технических наук, доцент кафедры «Информатика и процессы управления» Национального исследовательского ядерного университета МИФИ. Вся ее трудовая деятельность неразрывно связана с МИФИ, где она прошла путь от ассистента до доцента. Педагогический стаж – 30 лет. Автор более 70 научных трудов.

Область научных интересов: оптимальное управление, теория игр, теория случайных процессов.