Предисловие

Первое издание (2004 г.) учебного пособия «Моделирование систем. Лабораторный практикум» включало в себя 10 лабораторных работ, предназначенных для студентов специальности «Автоматизированные системы обработки информации и управления». Настоящее, 2-е издание состоит из 12 лабораторных работ, при этом 10 работ из первого издания подверглись изменениям и дополнениям. В первую очередь это касается программных кодов, выполненных в новой версии системы MATLAB (от 6.5 и выше). В большинство работ внесены дополнения в виде новых примеров.

Данное учебное пособие охватывает следующие разделы: системы массового обслуживания (многофазные и многоканальные системы обслуживания), статистическое моделирование на ЭВМ (включая метод Монте-Карло, интервальные методы оценки параметров вероятностных законов и метод максимального правдоподобия), дисперсионный анализ, планирование машинных экспериментов с моделями систем (пассивный и активный эксперименты), регрессионный анализ в случае неполного ранга наблюдений и идентификации линейных непрерывных систем управления.

Для выполнения лабораторного практикума необходимо знать основные положения теории дифференциальных уравнений, теории систем массового обслуживания, теорию вероятностей и математическую статистику, основы матричного исчисления, программирование на языках высокого уровня.

Как известно, *моделирование* (в широком смысле) является основным методом исследований во всех областях знаний и научно обоснованным методом оценок характеристик сложных систем, используемым для принятия решений в различных сферах инженерной деятельности.

Моделирование может быть определено как представление объекта моделью для получения информации об этом объекте путем проведения экспериментов с его моделью. Теория замещения одних объектов (оригиналов) другими объектами (моделями) и исследования свойств объектов на их моделях называется теорией моделирования. В современной теории моделирования большое место отводится *математическому моделированию*, под которым понимается процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью, и исследование этой модели, позволяющее получить характеристики рассматриваемого реального объекта. Следует помнить или учитывать, что любая математическая модель описывает реальный объект лишь с некоторой степенью приближения к действительности. Математическое моделирование можно разделить на аналитическое, имитационное и комбинированное.

Для *аналитического моделирования* характерно то, что процессы функционирования элементов системы записываются в виде некоторых функциональных соотношений (алгебраических, интегро-дифференциальных, конечно-разностных и т. д.) или логических условий. Аналитическая модель может быть исследована следующими методами:

а) аналитическим, когда стремятся получить в общем виде явные зависимости для искомых характеристик данной системы или объекта;

б) численным, когда, не умея решать уравнения в общем виде, стремятся получить численные результаты при конкретных начальных данных;

в) качественным, когда, не имея решения в явном виде, можно найти некоторые свойства решения (например, оценить устойчивость решения системы дифференциальных уравнений).

При *имитационном моделировании* реализующий модель алгоритм воспроизводит процесс функционирования исследуемой системы во времени, причем имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени, что позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях процесса в определенные моменты времени, дающие возможность оценить характеристики системы. Имитационное моделирование включает в себя метод статистического моделирования — метод машинной реализации имитационной модели и метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) — численный метод решения аналитической задачи.

Комбинированное моделирование (аналитико-имитационное) при анализе и синтезе систем позволяет объединить достоинства аналитического и имитационного моделирования. При построении комбинированных моделей проводится предварительная декомпозиция процесса функционирования объекта на составляющие подпроцессы, и для тех из них, где это возможно, используются аналитические модели, а для остальных подпроцессов строятся модели имитационные.

Как и в первом издании, авторы сделали упор на программировании типовых процессов, заданных своими математическими моделями. В качестве основной среды программирования принята система MATLAB (Matrix Laboratory — матричная лаборатория) и система GPSS (General Purpose System Simulation — общецелевая система моделирования), как наиболее подходящая для моделирования систем массового обслуживания. Поэтому самостоятельной целью данного учебно-практического пособия является развитие навыков программирования на языке высокого уровня системы MATLAB и имитационного моделирования в среде GPSS (в частности, GPSS/PC).

Каждая работа состоит из теоретической и практической частей. В теоретической части приводятся необходимые сведения для построения моделирующего алгоритма. В практической части дается основной программный код для решения поставленных задач. После решения каждой задачи предлагаются индивидуальные задания, рассчитанные на самостоятельное выполнение.

Предполагается, что преподаватель выбирает на свое усмотрение те или иные лабораторные работы для выполнения их в часы, отведенные на аудиторные занятия. Остальные работы рекомендуются для самостоятельного выполнения.

Лабораторная работа № 1
Моделирование многофазных систем массового обслуживания

Цель работы: практически освоить методы моделирования двухфазных и трехфазных систем массового обслуживания с нулевой вместимостью блоков ожидания в программных средах MATLAB и GPSS/PC с целью получения операционных характеристик.

Теоретическая часть

Анализ многофазных систем массового обслуживания основан на теоретическом материале, взятом из [20].

Система массового обслуживания может представляться в виде многофазной модели, когда каждое требование в ней последовательно обслуживается во всех фазах (приборах обслуживания). При этом если очереди перед каждой фазой не допускаются, то система будет называться системой с нулевой вместимостью блоков ожидания [20].

Работа двухфазной системы обслуживания состоит в следующем. Каждая фаза может быть занята на обслуживание либо свободна. Поскольку перед фазой очередь не допускается, то принимается, что первая фаза обслуживания заблокирована, если обслуживание требования в данной (первой) фазе завершено, а вторая фаза не готова к приему требования по той причине, что в ней не закончено обслуживание. Принимается также, что если первая фаза занята, то очередное входящее требование получает отказ. В системе могут быть следующие состояния: «фаза свободна», «фаза занята», «фаза заблокирована», которые обозначают как 0, 1, b соответственно.

1. Двухфазная система обслуживания

Схема двухфазной системы обслуживания показана на рис. 1.1.

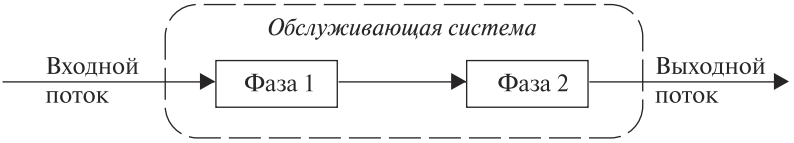

Рис. 1.1. Модель двухфазной системы обслуживания

Если состояние первой фазы обозначить символом i, а состояние второй фазы — символом j, то множество состояний двухфазной системы обслуживания будет следующим:

$$\{(i, j)\} = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (b,1)\}. \qquad (1.1)$$

Примем, что входной поток требований имеет пуассоновское распределение, а обслуживание в фазах осуществляется по экспоненциальному вероятностному закону. Рассматривая вероятности переходов из одного состояния в другое во времени, можно получить следующие дифференциальные уравнения относительно вероятностей состояний $p_{ij}(t)$ двухфазной системы:

$$\begin{aligned}
\frac{dp_{00}(t)}{dt} &= -\lambda p_{00}(t) + \mu p_{01}(t),\\
\frac{dp_{01}(t)}{dt} &= -(\mu+\lambda) p_{01}(t) + \mu p_{10}(t) + \mu p_{b1}(t),\\
\frac{dp_{10}(t)}{dt} &= \lambda p_{00}(t) - \mu p_{10}(t) + \mu p_{11}(t),\\
\frac{dp_{11}(t)}{dt} &= \lambda p_{01}(t) - 2\mu p_{11}(t),\\
\frac{dp_{b1}(t)}{dt} &= \mu p_{11}(t) - \mu p_{b1}(t).
\end{aligned} \qquad (1.2)$$

Система (1.2) — это система однородных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Ее можно представить в матричном виде:

$$\frac{dP(t)}{dt} = AP(t),$$

где:

$P(t)$ — вектор размера 5×1 с элементами $p_{00}(t), p_{01}(t), p_{10}(t), p_{11}(t), p_{b1}(t)$;

A — матрица коэффициентов размера 5×5, которая имеет следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\mu+\lambda) & \mu & 0 & \mu \\ \lambda & 0 & -\mu & \mu & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix}.$$

Для интегрирования системы (1.2) будем задавать естественные начальные условия, т. е. такие, когда в начальный момент времени, равный нулю, вероятность отсутствия требований в системе равна единице, а остальные вероятности в начальный момент времени равны нулю:

$$p_{00}(0) = 1,\ p_{01}(0) = p_{10}(0) = p_{11}(0) = p_{b1}(0) = 0 \qquad (1.3)$$

2. Трехфазная система обслуживания

В трехфазной системе каждая из фаз может быть свободной (символ 0) либо занятой (символ 1), а фазы 1 и 2 могут быть к тому же заблокированы (символ b). Если состояние первой фазы обозначить символом i, состояние второй фазы — символом j, а состояние третьей фазы — символом k, то возможные состояния трехфазной системы будут следующими:

$$\{(i,j,k)\} = \begin{Bmatrix} (0,0,0) & (1,0,0) & (0,1,0) & (0,0,1) & (1,0,1) & (1,1,1) \\ (1,1,0) & (b,1,0) & (1,b,1) & (b,b,1) & (b,1,1) & (0,b,1) \end{Bmatrix}. \qquad (1.4)$$

В соответствии с возможными состояниями (1.4) трехфазной системы можно получить следующую систему дифференциальных уравнений 13-го порядка относительно вероятностей состояний $P_{ijk}(t)$:

$$\frac{dp_{000}(t)}{dt} = -\lambda p_{000}(t) + \mu p_{001}(t),$$

$$\frac{dp_{100}(t)}{dt} = \lambda p_{000}(t) - \mu p_{100}(t) + \mu p_{101}(t),$$

$$\frac{dp_{010}(t)}{dt} = \mu p_{100}(t) - (\lambda + \mu) p_{010}(t) + \mu p_{011}(t),$$

$$\frac{dp_{001}(t)}{dt} = \mu p_{010}(t) - (\lambda + \mu) p_{001}(t) + \mu p_{0b1}(t),$$

$$\frac{dp_{101}(t)}{dt} = \lambda p_{001}(t) - 2\mu p_{101}(t) + \mu p_{110}(t) + \mu p_{1b1}(t),$$

$$\frac{dp_{011}(t)}{dt} = \mu p_{101}(t) - (\lambda + 2\mu) p_{011}(t) + \mu p_{b10} + \mu p_{bb1}(t),$$

$$\frac{dp_{111}(t)}{dt} = \lambda p_{011}(t) - 3\mu p_{111}(t),$$

$$\frac{dp_{110}(t)}{dt} = \lambda p_{010}(t) + \mu p_{111}(t) - 2\mu p_{110}(t),$$

$$\frac{dp_{b10}(t)}{dt} = \mu p_{110}(t) - \mu p_{b10}(t) + \mu p_{b11}(t),$$
$$\frac{dp_{1b1}(t)}{dt} = \mu p_{111}(t) - 2\mu p_{1b1}(t) + \lambda p_{0b1}(t),$$
$$\frac{dp_{bb1}(t)}{dt} = \mu p_{1b1}(t) - \mu p_{bb1}(t) + \mu p_{b11}(t),$$
$$\frac{dp_{b11}(t)}{dt} = \mu p_{111}(t) - 2\mu p_{b11}(t),$$
$$\frac{dp_{0b1}(t)}{dt} = \mu p_{011}(t) - (\lambda + \mu) p_{0b1}(t). \qquad (1.5)$$

Система (1.5) — это система обыкновенных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Ее также можно представить в матричном виде:

$$\frac{dP(t)}{dt} = AP(t),$$

где:

$P(t)$ — вектор состояний системы 13-го порядка;

A — матрица постоянных коэффициентов размера 13×13.

Для решения системы (1.5) будем использовать естественные начальные условия, т. е.

$$p_{000}(0) = 1, \quad \forall p_{ijk}(0) = 0, \quad i = 0,1,b, \quad j = 0,1,b, \quad k = 0,1,b. \qquad (1.6)$$

Отметим также, что система линейных дифференциальных уравнений будет иметь нетривиальное решение, если ее характеристический определитель будет равен нулю. В матричном виде получаем так называемое характеристическое уравнение

$$\det\left[sE - A\right] = 0, \qquad (1.7)$$

где:

E — единичная матрица того же размера, что и матрица коэффициентов A;

s — скалярная в общем случае комплексная переменная, относительно которой решается характеристическое уравнение.

Если действительная часть корней характеристического уравнения (1.7) будет отрицательной, то решение системы дифференциальных урав-

[. . .]