А. М. Тер-Крикоров
М. И. Шабунин

Курс математического анализа

МАТЕМАТИКА

Лаборатория ЗНАНИЙ

А. М. Тер-Крикоров
М. И. Шабунин

Курс математического анализа

9-е издание

Рекомендовано
Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области прикладных математики и физики
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению «Прикладная математика и физика»
или по другим направлениям и специальностям в области
математических и естественных наук, техники и технологии

Москва
Лаборатория знаний

УДК 517 (075.8)
ББК 22.161
Т35

Р е ц е н з е н т:
заведующий кафедрой математики
физического факультета МГУ
доктор физико-математических наук, профессор
В. Ф. Бутузов

Тер-Крикоров А. М.

Т35 Курс математического анализа : учебное пособие для вузов / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. — 9-е изд. — М. : Лаборатория знаний, 2023. — 672 с. : ил.

ISBN 978-5-93208-354-3

В пособии изложение теоретического материала иллюстрируется типовыми примерами. Большое внимание уделено трудным разделам курса математического анализа (равномерная сходимость функциональных рядов и интегралов, зависящих от параметра, равномерная непрерывность функций и т. д.).

Для студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей вузов с углубленной подготовкой по математике. Может быть использовано при самостоятельном изучении курса.

УДК 517 (075.8)
ББК 22.161

Учебное издание

Тер-Крикоров Александр Мартынович
Шабунин Михаил Иванович

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие для вузов

Редактор *Е. Ю. Ходан*
Компьютерная верстка: *Н. Л. Иванова*

Подписано в печать 22.12.22. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 42,00. Заказ

Издательство «Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

ISBN 978-5-93208-354-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию 3

ГЛАВА I. **ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА** 5

§ 1. Рациональные числа. Бесконечные десятичные дроби 5
§ 2. Точные грани числовых множеств 15
§ 3. Операции над вещественными числами 20

ГЛАВА II. **ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ** 35

§ 4. Определение предела последовательности. Свойства сходящихся последовательностей 35
§ 5. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Арифметические операции над сходящимися последовательностями 45
§ 6. Предел монотонной последовательности 50
§ 7. Подпоследовательности. Частичные пределы 55
§ 8. Критерий Коши сходимости последовательности 57

ГЛАВА III. **ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ** 61

§ 9. Числовые функции 61
§ 10. Предел функции 73
§ 11. Непрерывность функции 86
§ 12. Непрерывность элементарных функций 96
§ 13. Вычисление пределов функций 110

ГЛАВА IV. **ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ** 123

§ 14. Производная и дифференциал 123
§ 15. Правила дифференцирования 133
§ 16. Производные и дифференциалы высших порядков 143
§ 17. Основные теоремы для дифференцируемых функций 150
§ 18. Формула Тейлора 158
§ 19. Правило Лопиталя 172
§ 20. Исследование функций с помощью производных 176
§ 21. Вектор-функции 194
§ 22. Кривые 200

ГЛАВА V. **ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ** 222

§ 23. Пространство R^n 222
§ 24. Предел функции многих переменных 232
§ 25. Непрерывность функции многих переменных 237
§ 26. Дифференцируемость функции многих переменных 241
§ 27. Частные производные и дифференциалы высших порядков . 254
§ 28. Неявные функции 259
§ 29. Замена переменных 269

ГЛАВА VI. **НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ** 275

§ 30. Определение и свойства неопределенного интеграла. Основные методы интегрирования 275
§ 31. Комплексные числа 284
§ 32. Разложение рациональной функции на простые дроби 295
§ 33. Интегрирование рациональных, иррациональных, тригонометрических и гиперболических функций 302

ГЛАВА VII. **ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ** 316

§ 34. Определение и условия существования определенного интеграла 316
§ 35. Свойства определенного интеграла 326
§ 36. Интеграл с переменным верхним пределом. Вычисление определенных интегралов 334
§ 37. Приложения определенного интеграла 343
§ 38. Несобственные интегралы 358

ГЛАВА VIII. **ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ** 383

§ 39. Определение и свойства сходящихся рядов 383
§ 40. Ряды с неотрицательными членами 388
§ 41. Абсолютно и условно сходящиеся ряды 395

ГЛАВА IX. **ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ** 408

§ 42. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов 408
§ 43. Степенные ряды 425
§ 44. Ряд Тейлора 434

ГЛАВА X. **КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ** 446

§ 45. Мера Жордана в R^n 446
§ 46. Определение и свойства кратного интеграла Римана 452
§ 47. Сведение кратных интегралов к повторным 460
§ 48. Формула замены переменных в кратном интеграле 470
§ 49. Несобственные кратные интегралы 486

ГЛАВА XI. **КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ** . . . 491

§ 50. Криволинейные интегралы . . . 491
§ 51. Формула Грина на плоскости . . . 500
§ 52. Поверхности . . . 510
§ 53. Площадь поверхности . . . 522
§ 54. Поверхностные интегралы . . . 527

ГЛАВА XII. **ТЕОРИЯ ПОЛЯ** . . . 536

§ 55. Скалярные и векторные поля . . . 536
§ 56. Формула Остроградского–Гаусса . . . 542
§ 57. Формула Стокса . . . 547

ГЛАВА XIII. **ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ** . . . 554

§ 58. Формула Тейлора для функций многих переменных . . . 554
§ 59. Экстремумы функций многих переменных . . . 557
§ 60. Условный экстремум . . . 562

ГЛАВА XIV. **РЯДЫ ФУРЬЕ** . . . 572

§ 61. Ортогональные системы функций. Ряды Фурье по ортогональным системам . . . 572
§ 62. Лемма Римана . . . 576
§ 63. Формула для частичных сумм тригонометрического ряда Фурье . . . 578
§ 64. Сходимость ряда Фурье в точке . . . 581
§ 65. Почленное дифференцирование и интегрирование ряда Фурье 589
§ 66. Равномерная сходимость ряда Фурье . . . 592
§ 67. Комплекснозначные функции. Ряд Фурье в комплексной форме . . . 594
§ 68. Суммирование ряда Фурье методом средних арифметических . . . 596
§ 69. Теоремы Вейерштрасса о равномерных приближениях непрерывных функций многочленами . . . 598
§ 70. Сходимость ряда Фурье в смысле среднего квадратичного . . 601

ГЛАВА XV. **ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА** . . . 616

§ 71. Собственные интегралы, зависящие от параметра . . . 616
§ 72. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость несобственного интеграла по параметру 618
§ 73. Эйлеровы интегралы . . . 634
§ 74. Интеграл Фурье . . . 639
§ 75. Преобразование Фурье . . . 645
§ 76. Элементы теории обобщенных функций . . . 649
§ 77. Асимптотические оценки интегралов . . . 657

Список литературы . . . 664

Предметный указатель . . . 665

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

При написании настоящей книги авторы опирались на многолетний опыт чтения курса математического анализа и ведения семинарских занятий в Московском физико-техническом институте. Изложение теоретического материала подкрепляется достаточным числом примеров, помогающих освоению основных идей курса и выработке навыков в решении прикладных задач. Особое внимание уделяется таким традиционно трудным для студентов понятиям, как равномерная непрерывность функции, сходимость несобственных интегралов, равномерная сходимость функциональных рядов и интегралов, зависящих от параметра.

Наряду с традиционными разделами курса математического анализа в книге кратко изложены элементы теории обобщенных функций и простейшие методы получения асимптотических оценок интегралов. Вопросы приближенных вычислений интегралов и сумм рядов в настоящее время обычно входят в курсы вычислительной и прикладной математики и в данной книге не рассматриваются.

Следует отметить, что основы построения и стиль преподавания математического анализа в МФТИ разработаны большим коллективом преподавателей кафедры высшей математики. Это обстоятельство оказало несомненное влияние на авторов при написании предлагаемой читателю книги, которая может служить учебным пособием для физико-математических и инженерно-физических специальностей вузов с повышенной программой по математике. Книга может оказаться полезной и при самостоятельном изучении курса математического анализа.

Тираж первого издания (1988 г.) быстро разошелся и возникла потребность во втором издании (1997 г., издательство МФТИ). Учитывая пожелания читателей, авторы переработали многие разделы курса, и в первую очередь материалы глав X (кратные интегралы) и XIV (ряды Фурье).

При переработке были упрощены доказательства ряда сложных теорем. Большое внимание уделено изложению основных идей доказательств. Авторы стремились избежать чрезмерной детализации, но не в ущерб логической строгости. Так, без существенного ограничения общности дано более простое изложение теории жордановой меры и кратных интегралов (глава X). В главе XIV упрощены доказательства ряда теорем за счет незначительного сужения классов рассматриваемых функций.

Главы XVI и XVII из первого издания книги, представляющие интерес для более узкого круга учащихся, в настоящее издание не включены.

Опущены также доказательства ряда теорем (интегрируемость по Риману функции, имеющей конечное число точек разрыва первого рода, теорема Римана об условно сходящихся рядах, признак Раабе сходимости ряда и др.). Исключены некоторые примеры повышенной трудности, разобранные в первом издании, добавлены задачи для самостоятельного решения.

Авторы признательны преподавателям и студентам МФТИ, сделавшим ряд ценных замечаний и указавшим авторам на опечатки и неточности, допущенные в первом издании книги.

Особую благодарность авторы выражают профессорам кафедры высшей математики МФТИ П.Б. Гусятникову, В.Б. Лидскому, Е.С. Половинкину и доценту В.И. Чехлову.

В третье издание внесены необходимые исправления и дополнения.

ГЛАВА I

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Рациональные числа. Бесконечные десятичные дроби

1. Логическая символика. При изложении курса математического анализа для сокращения будем использовать логические символы $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, значения которых разъясняются в приводимой ниже таблице.

Символ	Название	Разъяснение
$\forall$	Знак *общности*	Заменяет слова: для любого, для каждого, для всех
$\exists$	Знак *существования*	Заменяет слова: существует, найдется
$\Rightarrow$	Знак *следования* (*импликации*)	Запись $A \Rightarrow B$ означает, что A влечет B или B следует из A
$\Leftrightarrow$	Знак *равносильности* (*эквивалентности*)	Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что B следует из A и A следует из B. Иначе: A равносильно B; A необходимо и достаточно для B; A тогда и только тогда, когда B

Символы $\forall$, $\exists$ называют *кванторами* (общности и существования).

Кроме указанных в таблице символов, употребляются также следующие знаки:

а) $\vee$ — знак *дизъюнкции*, заменяет союз “или”; запись $A \vee B$ означает, что имеет место хотя бы одно из высказываний A, B;

б) $\wedge$ — знак *конъюнкции*, заменяет союз “и”;

в) $\rceil$ — знак *отрицания*; запись $\rceil A$ означает “не A” (отрицание высказывания A).

Рассмотрим примеры использования логических символов.

Пример 1. Пусть

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \text{квадратный трехчлен } y = ax^2 + bx + c \text{ принимает} \\ \text{положительные значения при всех } x \end{array} \right\},$$

$$B = \{D < 0\}, \quad \text{где} \quad D = b^2 - 4ac,$$
$$C = \{D < 0,\ a > 0\} = \{D < 0\} \wedge \{a > 0\}.$$

Докажем, что $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow C$.

$\triangle$ а) Предположим, что из A не следует B. Тогда $D = b^2 - 4ac \geqslant 0$.

В этом случае квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни x_1 и x_2 ($x_1 = x_2$ при $D = 0$) и поэтому обращается в нуль при $x = x_1$ и $x = x_2$, что противоречит A. Итак, предположение о том, что из A не следует B, является неверным. Поэтому из A следует B, т. е. $A \Rightarrow B$.

б) Докажем, что $A \Rightarrow C$. Воспользуемся равенством

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-D}{4a^2}\right]. \tag{1}$$

Так как $A \Rightarrow \{D < 0\}$, то выражение в квадратных скобках в формуле (1) положительно, и поэтому из условия $y > 0$ следует, что $a > 0$. Итак, $A \Rightarrow C$.

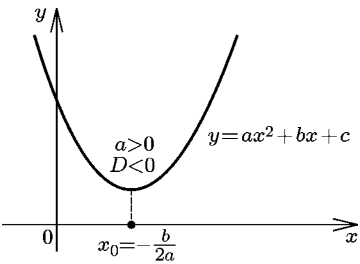

Рис. 1.1

Обратно: если имеет место C, т. е. $D < 0$ и $a > 0$, то из равенства (1) следует, что $y > 0$ при всех x.

Таким образом, квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные значения при всех действительных значениях x (рис. 1.1) тогда и только тогда, когда $a > 0$ и $D = b^2 - 4ac < 0$. ▲

Использование кванторов $\forall$, $\exists$ позволяет не только сокращать запись, но и легко строить отрицания утверждений (высказываний, определений), содержащих слова “любой”, “существует”, которые часто встречаются в определениях и теоремах.

Пример 2. Пусть заданы числовое множество X и число M. Записать с помощью кванторов отрицание утверждений:

а) $A = \left\{\begin{array}{l}\text{все элементы } x \text{ числового множества } X\\ \text{удовлетворяют условию } x < M\end{array}\right\}$;

б) $B = \left\{\begin{array}{l}\text{существует число } M > 0 \text{ такое, что все элементы } x\\ \text{из множества } X \text{ удовлетворяют условию } |x| \geqslant M\end{array}\right\}$.

△ а) Пусть A не имеет места, т. е. не все элементы x множества X удовлетворяют условию $x < M$. Это означает, что найдется (существует) такой элемент $x \in X$, для которого неравенство $x < M$ не выполняется, т. е. имеет место противоположное неравенство $x \geqslant M$.

Запишем A и $\rceil A$ с помощью кванторов:

$$A = \{\forall x \in X \to x < M\},$$
$$\rceil A = \{\exists x \in X\colon\ x \geqslant M\}.$$

Здесь знак $\to$ заменяет слова “выполняется”, “имеет место”, а двоеточие заменяет слова “такой, что”.

б) Пусть B не имеет места, т. е. не существует числа $M > 0$ такого, чтобы для любого $x \in X$ имело место неравенство $|x| \geqslant M$. Это означает, что для любого $M > 0$ неравенство $|x| \geqslant M$ не может выполняться для каждого $x \in X$. Иначе говоря, существует такой элемент $x = x_M \in X$ (зависящий, вообще говоря, от M), для которого неравенство $|x| \geqslant M$ не выполняется, т. е. справедливо неравенство $|x_M| < M$. С помощью кванторов утверждения B и $\rceil B$ можно записать так:

$$B = \{\exists M > 0\colon\ \forall x \in X \to |x| \geqslant M\},$$
$$\rceil B = \{\forall M > 0\ \ \exists x_M \in X\colon\ |x_M| < M\}. \quad \blacktriangle$$

Эти примеры показывают, что отрицание утверждения, содержащего кванторы $\forall$, $\exists$ и свойство P (в данных примерах это неравенства $x < M$ и $|x| \geqslant M$ соответственно), получается заменой $\forall$ на $\exists$, $\exists$ на $\forall$ и свойства P — на его отрицание.

2. Рациональные числа и их свойства. Понятие рационального числа и основные свойства рациональных чисел известны из курса математики для средней школы. Рациональное число можно записать в виде p/q, где p — целое, q — натуральное число. В частности, любое целое число p является рациональным, так как его можно записать в виде $p = p/1$. Например, $0 = 0/1$, $1 = 1/1$.

Пусть $a = p/q$, $b = p_1/q_1$ — два рациональных числа. Тогда правило упорядочения этих чисел определяется так:

а) если $pq_1 = qp_1$, то $a = b$;

б) если $pq_1 > qp_1$, то $a > b$;

в) если $pq_1 < qp_1$, то $a < b$;

а сумма и произведение чисел a и b определяются соответственно равенствами

$$a + b = \frac{pq_1 + qp_1}{qq_1}, \quad ab = \frac{pp_1}{qq_1}.$$

Операции сложения и умножения рациональных чисел обладают свойствами:

а) коммутативности:

$$a + b = b + a, \quad ab = ba;$$

б) ассоциативности:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc);$$

в) дистрибутивности:

$$a(b + c) = ab + ac;$$

г) для любого рационального числа a справедливы равенства

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a.$$

Операции вычитания и деления вводятся как обратные соответственно к операциям сложения и умножения:

а) для любых рациональных чисел a, b существует (и притом единственное) число x такое, что

$$b + x = a;$$

это число называют *разностью* чисел a и b и обозначают $a - b$; в частности, разность $0 - b$ обозначают $-b$;

б) если $b \neq 0$, то существует единственное число z такое, что

$$bz = a;$$

это число называют *частным* чисел a и b и обозначают a/b.

Отметим еще основные свойства неравенств для рациональных чисел:

а) если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (транзитивность);

б) если $a > b$, то $a + c > b + c$ при любом c;

в) если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$;

г) если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$;

д) если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

N — множество натуральных чисел,

Z — множество целых чисел,

Q — множество рациональных чисел.

В множестве Q можно выполнять не только четыре арифметических действия, но и решать уравнения и системы уравнений первой степени. Однако даже простейшие квадратные уравнения вида $x^2 = a$, где $a \in N$, не всегда разрешимы в множестве Q. В частности, уравнение $x^2 = 2$ не имеет решений в множестве Q.

Таким образом, уже проблема решения простых уравнений типа $x^2 = a$, $x^3 = a$, где $a \in N$, приводит к необходимости расширения множества рациональных чисел путем добавления к этому множеству новых элементов, называемых *иррациональными числами.* Ниже (без изложения всех подробностей) показывается, как такое расширение строится.

3. Бесконечные десятичные дроби и их приближения.

а) *Периодичные десятичные дроби.* Из школьного курса алгебры известно, что любое рациональное число можно представить либо в виде конечной, либо в виде бесконечной периодической десятичной дроби, используя алгоритм деления “уголком”. Например, рациональному числу $3/8$ соответствует конечная десятичная дробь 0,375, т. е. $3/8 = 0{,}375$. Аналогично, рациональному числу $-27/11$ соответствует бесконечная периодическая десятичная дробь $-2{,}4545\ldots = -2{,}(45)$, т. е. $-27/11 = -2{,}(45)$.

Обратно: зная бесконечную периодическую десятичную дробь, можно найти рациональное число, представлением которого эта дробь является. Для этого используется формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $a + aq + aq^2 + \ldots = \dfrac{a}{1-q}$, $|q| < 1$.

Например,

$$2{,}(45) = 2 + \frac{45}{100} + \frac{45}{100^2} + \ldots = 2 + \frac{\frac{45}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 2 + \frac{45}{99} = \frac{27}{11}.$$

Рациональное число, представимое конечной десятичной дробью, будем отождествлять с соответствующей бесконечной десятичной дробью с нулем в периоде. Заметим, что рациональное число, представимое конечной десятичной дробью, можно записать и в виде бесконечной десятичной дроби с цифрой 9 в периоде. Например, $2{,}5 = 2{,}5(0) = 2{,}4(9)$.

Таким образом, между множеством всех рациональных чисел и множеством всех бесконечных периодических десятичных дробей устанавливается взаимно однозначное соответствие, если отождествлять бесконечную десятичную дробь с цифрой 9 в периоде с соответствующей бесконечной десятичной дробью с цифрой 0 в периоде.

Условимся употреблять такие бесконечные периодические десятичные дроби, которые не имеют цифры 9 в периоде. Если бесконечная периодическая десятичная дробь с цифрой 9 в периоде возникает в процессе рассуждений, то будем такую дробь заменять бесконечной десятичной дробью с нулем в периоде.

Упражнение 1. Доказать, что если $\frac{p}{q}$ $(p \in N,\ q \in N)$ — рациональное число, соответствующее бесконечной периодической десятичной дроби α, то рациональное число $10^k \frac{p}{q}$ $(k \in N)$ соответствует бесконечной периодической десятичной дроби, получаемой из α сдвигом запятой вправо на k разрядов. Используя это правило, показать, что если бесконечная периодическая десятичная дробь имеет вид $\alpha = a_0, a_1 \ldots a_n (b_1 \ldots b_m)$, то

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_m - a_1 a_2 \ldots a_n}{\underbrace{99\ldots9}_{m}\underbrace{00\ldots0}_{n}}.$$

б) *Множество вещественных чисел.* Рассмотрим бесконечную десятичную дробь вида

$$\pm a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots \qquad (2)$$

Эта дробь определяется заданием знака $+$ или $-$, целого неотрицательного числа a_0 и последовательности десятичных знаков $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ (множество десятичных знаков состоит из десяти чисел: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Всякую дробь вида (2) будем называть *вещественным числом.* Если перед дробью (2) стоит знак $+$, его обычно опускают и пишут

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots \qquad (3)$$

Число вида (3) будем называть *неотрицательным вещественным числом*, а в случае, когда хотя бы одно из чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ отлично от нуля, — *положительным вещественным числом.* Число вида

$$-a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots, \tag{4}$$

где хотя бы одно из чисел a_0, a_1, a_2, ... отлично от нуля, будем называть *отрицательным вещественным числом.*

Если $a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, $b = -a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, то число b называют *противоположным* числу a, а число a — противоположным числу b.

Если дробь (2) является периодической, то ее называют *рациональным числом*, а если эта дробь не является периодической, то ее называют *иррациональным числом.* Множество всех десятичных дробей вида (2) называют множеством *вещественных чисел* и обозначают R, а его подмножество, состоящее из непериодических десятичных дробей, — множеством *иррациональных чисел* и обозначают J.

Приведем примеры иррациональных чисел.

1) $$a = 0{,}1234567891011\ldots \tag{5}$$

Здесь после запятой стоят натуральные числа, выписанные подряд, начиная с единицы.

2) $$b = 27{,}1010010001000010\ldots \tag{6}$$

Здесь после запятой выписаны подряд числа 10, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$ и т. д.

Упражнение 2. Показать, что числа a и b, заданные равенствами (5) и (6), являются иррациональными.

в) *Десятичные приближения вещественных чисел.* Поставим в соответствие неотрицательному вещественному числу (3) конечные десятичные дроби

$$\overline{\alpha}_n = a_0, a_1 \ldots a_n + \frac{1}{10^n}, \quad \underline{\alpha}_n = a_0, a_1 \ldots a_n$$

и будем называть их *n-ми десятичными приближениями* числа $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ соответственно с *избытком* и *недостатком.* Если α — отрицательное вещественное число вида (4), то для него n-е десятичные приближения с избытком и недостатком определяются соответственно равенствами

$$\overline{\alpha}_n = -a_0, a_1 \ldots a_n, \quad \underline{\alpha}_n = -a_0, a_1 \ldots a_n - \frac{1}{10^n}.$$

Десятичные приближения найдут применение при определении арифметических операций на множестве R (§ 3).

Упражнение 3. Показать, что для любого вещественного числа его десятичные приближения обладают следующими свойствами:

а) $\overline{\alpha}_k - \underline{\alpha}_k = \dfrac{1}{10^k}, \quad k \in N$;

б) $\underline{\alpha}_1 \leqslant \underline{\alpha}_2 \leqslant \ldots \leqslant \underline{\alpha}_n \leqslant \ldots$;

в) $\overline{\alpha}_1 \geqslant \overline{\alpha}_2 \geqslant \ldots \geqslant \overline{\alpha}_n \geqslant \ldots$;

г) $\underline{\alpha}_n < \overline{\alpha}_m$ для любых n и m.

4. Сравнение вещественных чисел.

а) *Сравнение неотрицательных чисел.* Два неотрицательных вещественных числа

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 ... a_n ... \quad \text{и} \quad \beta = b_0, b_1 b_2 ... b_n ...$$

называют *равными* и пишут $\alpha = \beta$, если $a_k = b_k$ при $k = 0, 1, 2, ...$, т. е.

$$\{\alpha = \beta\} \Leftrightarrow \{a_k = b_k,\ k = 0, 1, 2, ...\}.$$

В частности, $\{\alpha = 0\} \Leftrightarrow \{a_k = 0,\ k = 0, 1, 2, ...\}$.

Дадим определение соотношений $\alpha < \beta$ и $\alpha > \beta$. Говорят, что число α *меньше* числа β, и пишут $\alpha < \beta$, если либо $a_0 < b_0$, либо $a_0 = b_0$ и существует такой номер n, что $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_{n-1} = b_{n-1}$, но $a_n < b_n$, т. е.

$$\{\alpha < \beta\} \Leftrightarrow \{a_0 < b_0\} \vee \{\exists n \in N\colon\ a_k = b_k,\ k = \overline{0, n-1};\ a_n < b_n\}.$$

Запись $k = \overline{0, n-1}$ означает, что равенство $a_k = b_k$ выполняется при значениях k от 0 до $n - 1$ включительно, так что n — наименьший номер, для которого это равенство не выполняется и имеет место неравенство $a_n < b_n$. Аналогично

$$\{\alpha > \beta\} \Leftrightarrow \{a_0 > b_0\} \vee \{\exists n \in N\colon\ a_k = b_k,\ k = \overline{0, n-1};\ a_n > b_n\}.$$

Из определения равенства $\alpha = \beta$ и неравенств $\alpha < \beta$ и $\alpha > \beta$ следует, что для любых неотрицательных вещественных чисел α и β выполняется одно из трех условий: $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$.

Отметим еще, что для любого неотрицательного вещественного числа α справедливо неравенство $\alpha \geqslant 0$.

б) *Сравнение произвольных вещественных чисел.* Назовем *модулем вещественного числа* α вещественное число, обозначаемое символом $|\alpha|$, представимое той же бесконечной десятичной дробью, что и число α, но взятое со знаком $+$. Таким образом, если

$$\alpha = \pm a_0, a_1 a_2 ... a_n ..., \quad \text{то} \quad |\alpha| = a_0, a_1 a_2 ... a_n ...,$$

откуда следует, что $|\alpha|$ — неотрицательное вещественное число при любом α.

Введем теперь правило сравнения двух вещественных чисел α и β для случая, когда хотя бы одно из этих чисел отрицательно (правило сравнения неотрицательных чисел введено выше).

Если α — неотрицательное, β — отрицательное число, то считают, что $\alpha > \beta$.

Если оба числа α и β отрицательны ($\alpha < 0$, $\beta < 0$), то будем считать, что:

1) $\alpha = \beta$, если $|\alpha| = |\beta|$,

2) $\alpha < \beta$, если $|\beta| < |\alpha|$.

Таким образом, правило сравнения сформулировано для любых вещественных чисел.

Замечание 1. Легко убедиться в том, что сформулированное правило сравнения вещественных чисел в применении к рациональным числам, записанным в виде бесконечных десятичных дробей, приводит к тому же результату, что и правило сравнения рациональных чисел (п. 2), представленных в виде отношения целых чисел.

Замечание 2. Если $\underline{\alpha}_n$, $\underline{\beta}_n$ — n-е приближения с недостатком, а $\overline{\alpha}_n$, $\overline{\beta}_n$ — n-е приближения с избытком чисел α и β соответственно, то из правила сравнения вещественных чисел следует, что:

1) $\underline{\alpha}_n \leqslant \alpha \leqslant \overline{\alpha}_n$, $\underline{\beta}_n \leqslant \beta \leqslant \overline{\beta}_n$ для любого $n \in N$;

2) $\alpha < \beta \Rightarrow \exists n\colon\ \overline{\alpha}_n < \underline{\beta}_n$.

в) *Транзитивность правила сравнения.* Докажем, что если $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$. Ограничимся доказательством для случая, когда сравниваются неотрицательные числа. Пусть

$$\alpha = a_0, a_1a_2\ldots a_n\ldots,$$
$$\beta = b_0, b_1b_2\ldots b_n\ldots,$$
$$\gamma = c_0, c_1c_2\ldots c_n\ldots$$

Пусть p и m — наименьшие номера, для которых нарушаются соответственно равенства $a_k = b_k$ и $b_k = c_k$ $\ (k = 0, 1, 2, \ldots)$, и пусть, например, $p \leqslant m$. Тогда p — наименьший номер, при котором нарушается равенство $a_k = c_k$ и имеет место неравенство $a_p < c_p$. По правилу сравнения вещественных чисел отсюда следует, что $\alpha < \gamma$.

5. Свойства вещественных чисел, связанные с неравенствами.

Лемма 1. *Если α и β — вещественные числа, причем $\alpha < \beta$, то найдется такое рациональное число r, что*

$$\alpha < r < \beta. \tag{7}$$

○ а) Пусть α и β — рациональные числа ($\alpha \in Q$, $\ \beta \in Q$). Тогда для них определены арифметические операции, и в качестве r можно взять число $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, так как

$$\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta.$$

б) Пусть по крайней мере одно из чисел α, β является иррациональным. Будем считать, что $\beta \in J$. Предположим для определенности, что $\alpha \geqslant 0$ и что

$$\alpha = a_0, a_1a_2\ldots a_n\ldots$$

Так как $\beta > \alpha$ и $\alpha \geqslant 0$, то $\beta > 0$. Пусть

$$\beta = b_0, b_1b_2\ldots b_n\ldots$$

Пусть p — наименьший номер, при котором нарушается равенство $a_k = b_k$ $\ (k = 0, 1, 2, \ldots)$. Будем считать, что $p > 0$. Тогда

$$a_0 = b_0, \quad \ldots, \quad a_{p-1} = b_{p-1}, \quad a_p < b_p. \tag{8}$$

По условию $\beta \in J$, и, значит, β не может быть конечной десятичной дробью (бесконечной периодической дробью с периодом 0). Поэтому найдется номер, больший p (обозначим его $p+m$) и такой, что

$$b_{p+m} > 0. \tag{9}$$

Покажем, что рациональное число $r = a_0, a_1 ... a_{p-1} b_p ... b_{p+m-1}(0)$ удовлетворяет условию (7). Из (8) следует, что $\alpha < r$. Далее, $r = b_0, b_1 ... b_{p+m-1}(0) < b_0, b_1 ... b_{p+m-1} b_{p+m} ...$ в силу условия (9), т. е. $r < \beta$. Итак, доказано, что $\alpha < r < \beta$, причем $r \in Q$. ●

Следствие. *Если $\alpha \in R$, $\beta \in R$ и $\alpha < \beta$, то*

$$\exists r \in Q \quad \exists r' \in Q\colon\ \alpha < r < r' < \beta. \tag{10}$$

Упражнение 4. Пусть $\alpha \in R$, $\beta \in R$ и $\alpha < \beta$. Доказать, что

$$\exists \gamma \in J\colon\ \alpha < \gamma < \beta.$$

Лемма 2. *Пусть $\delta \in R$, $\delta' \in R$ и пусть существуют такие последовательности рациональных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, что для всех $n \in N$ справедливы неравенства*

$$x_n \leqslant \delta \leqslant \delta' \leqslant y_n, \tag{11}$$

$$y_n - x_n \leqslant \frac{1}{10^n}. \tag{12}$$

Тогда

$$\delta = \delta'. \tag{13}$$

○ Пусть равенство (13) не выполняется; тогда из условия (11) следует, что $\delta < \delta'$. В силу следствия из леммы 1 существуют рациональные числа r и r' такие, что

$$\delta < r < r' < \delta'. \tag{14}$$

Из (14) следует, что $r' - r > 0$, и поэтому

$$\exists m \in N\colon\ r' - r > \frac{1}{10^m}. \tag{15}$$

Из (11) и (14) следует, что

$$x_n \leqslant \delta < r < r' < \delta' \leqslant y_n,$$

откуда в силу транзитивности правила сравнения получаем

$$x_n < r < r' < y_n. \tag{16}$$

Используя неравенства (15), (12), (16) и свойства неравенств для рациональных чисел, получаем

$$\frac{1}{10^m} < r' - r < y_n - x_n \leqslant \frac{1}{10^n},$$

откуда следует, что
$$\frac{1}{10^m} < \frac{1}{10^n}. \tag{17}$$
Неравенство (17) должно выполняться при фиксированном $m \in N$ и при любом $n \in N$. Однако при $n = m$ неравенство (17) не выполняется. Поэтому неравенство $\delta < \delta'$ не может иметь места, т. е. справедливо равенство (13). ●

6. Геометрическая интерпретация вещественных чисел. Рассмотрим прямую l (рис. 1.2), выберем на ней начало отсчета (точ-

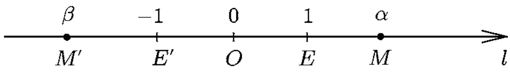

Рис. 1.2

ку O) и масштабный отрезок OE длины 1. Числу 0 поставим в соответствие точку O, числу 1 — точку E, числу -1 — точку E', симметричную точке E относительно O. Положительному числу $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ поставим в соответствие точку M, находящуюся справа от O на расстоянии α, а отрицательному числу $\beta = -b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$ — точку M', находящуюся слева от O на расстоянии $|\beta|$.

Эту прямую будем называть *числовой прямой* или *числовой осью.* Из аксиом геометрии и свойств вещественных чисел следует, что между множеством вещественных чисел R и числовой прямой l устанавливается взаимно однозначное соответствие: каждому вещественному числу соответствует единственная точка числовой прямой и, наоборот, каждой точке числовой прямой соответствует некоторое вещественное число. Поэтому в дальнейшем будем отождествлять множество R с множеством точек числовой прямой, а вещественные числа часто будем называть *точками.*

Условимся о следующих обозначениях для некоторых наиболее употребительных числовых множеств:

1) *отрезок* $[a, b] = \{x\colon\ a \leqslant x \leqslant b\}$;

2) *интервал* $(a, b) = \{x\colon\ a < x < b\}$;

3) *полуинтервалы* $[a, b) = \{x\colon\ a \leqslant x < b\}$, $(a, b] = \{x\colon\ a < x \leqslant b\}$.

Точки a и b называют *концами отрезка*, интервала, полуинтервала (a — *левым концом*, b — *правым*); отрезок $[a, b]$, интервал (a, b), полуинтервалы $[a, b)$ и $(a, b]$ называют *конечными промежутками* (или промежутками), а точки x такие, что $a < x < b$, — их *внутренними точками.*

Наряду с конечными промежутками рассматривают также *бесконечные промежутки*:

а) интервалы
$$(a, +\infty) = \{x\colon\ x > a\} \quad \text{и} \quad (-\infty, a) = \{x\colon\ x < a\};$$

б) полуинтервалы

$$[a, +\infty) = \{x\colon\ x \geqslant a\} \quad \text{и} \quad (-\infty, a] = \{x\colon\ x \leqslant a\};$$

в) $(-\infty, +\infty) = \{x\colon\ x \in R\}$ — множество вещественных чисел.

Напомним также, что если каждый элемент множества A является элементом множества B, то пишут $A \subset B$ или $B \supset A$ и говорят, что A является *подмножеством множества* B. Например, $J \subset R$, $Q \subset R$.

Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B, называется *объединением множеств* A и B и обозначается $A \cup B$.

Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B, называется *пересечением множеств* A и B и обозначается $A \cap B$.

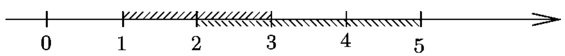

Рис. 1.3

Например, если $A = [1, 3]$, $B = (2, 5)$, то $A \cup B = -[1, 5)$, $A \cap B = (2, 3]$ (рис. 1.3).

Отметим, что

$$J \cup Q = R, \quad J \cap Q = \varnothing,$$

где $\varnothing$ — *пустое множество*, т. е. множество, не содержащее элементов.

§ 2. Точные грани числовых множеств

1. Верхняя и нижняя грани числовых множеств. Множество X вещественных чисел ($X \subset R$) называется *ограниченным сверху*, если существует вещественное число C такое, что все элементы множества X не превосходят C, т. е.

$$\exists C \in R\colon\ \forall x \in X \to x \leqslant C. \tag{1}$$

Всякое вещественное число C, обладающее свойством (1), называют *верхней гранью числового множества* X.

Аналогично множество $X \subset R$ называется *ограниченным снизу*, если

$$\exists C' \in R\colon\ \forall x \in X \to x \geqslant C'. \tag{2}$$

Всякое число C', удовлетворяющее условию (2), называют *нижней гранью числового множества* X.

Если числовое множество ограничено как сверху, так и снизу, его называют *ограниченным*, т. е. $\{X$ — ограниченное множество$\} \Leftrightarrow \{\exists C' \in R\ \ \exists C \in R\colon\ \ \forall x \in X \to C' \leqslant x \leqslant C\}$.

П р и м е р 1. Записать $\rceil A$ с помощью кванторов, если

$$A = \{C \text{ — верхняя грань множества } X \subset R\}.$$

$\triangle$ По условию $A = \{\forall x \in X \to x \leqslant C\}$. Используя правило построения отрицания (§ 1, пример 2), получаем

$$\rceil A = \{\exists x_0 \in X\colon\ x_0 > C\}. \ \blacktriangle$$

П р и м е р 2. Записать $\rceil B$, если

$$B = \{\text{множество } X \text{ ограничено снизу}\}.$$

$\triangle$ По условию $B = \{\exists C \in R\colon\ \forall x \in X \to x \geqslant C\}$. Поэтому

$$\rceil B = \{\forall C \in R \quad \exists x_C \in X\colon\ x_C < C\}. \ \blacktriangle$$

У п р а ж н е н и е 1. Записать с помощью кванторов отрицания следующих утверждений:

а) $A = \{$множество $X \subset R$ ограничено сверху$\}$;

б) $B = \{C$ — нижняя грань множества $X\}$;

в) $D = \{$множество X является ограниченным$\}$.

2. Определение точной верхней и нижней грани. Пусть числовое множество X ограничено сверху, тогда выполняется условие (1), а число C является верхней гранью множества X. Ясно, что любое число, большее C, также является верхней гранью множества X. Таким образом, ограниченное сверху числовое множество имеет бесконечно много верхних граней, среди которых особую роль играет наименьшая. Речь идет о числе M, обладающем следующими свойствами:

а) M — верхняя грань множества X;

б) любое число M' меньшее M, не является верхней гранью множества X.

Это число M будем в дальнейшем называть точной верхней гранью множества X. Сформулируем определение точной верхней грани с помощью символов. Чтобы подчеркнуть важность вводимого понятия (и будем так поступать в дальнейшем), поставим перед ним слово “определение”.

О п р е д е л е н и е 1. Число M называется *точной верхней гранью числового множества* X, если выполняются следующие условия:

а) $$\forall x \in X \to x \leqslant M; \tag{3}$$

б) $$\forall \alpha < M \exists x_\alpha \in X\colon\ x_\alpha > \alpha. \tag{4}$$

Точная верхняя грань числового множества X обозначается $\sup X$ (читается “супремум”). Таким образом,

$$\{M = \sup X\} \Leftrightarrow \{\forall x \in X \to x \leqslant M\} \wedge \{\forall \alpha < M \quad \exists x_\alpha \in X\colon\ x_\alpha > a\}.$$

[. . .]