М. Айгнер, Г. Циглер

Доказательства из Книги

Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней

ИЗДАТЕЛЬСТВО
БИНОМ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ИЗ КНИГИ

ЛУЧШИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СО ВРЕМЕН ЕВКЛИДА ДО НАШИХ ДНЕЙ

Martin Aigner, Günter M. Ziegler

Proofs from THE BOOK

Fourth Edition

Including illustrations by Karl H. Hofmann

Corrected printing 2013

Springer

М. Айгнер, Г. Циглер

Доказательства из Книги

Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней

2-е издание, дополненное

С иллюстрациями Карла Г. Хофмана

Перевод 4-го английского издания
Б. И. Селиванова

под редакцией
А. М. Зубкова

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний

УДК 51.1
ББК 22.1
А37

Айгнер М.

А37 Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней / М. Айгнер, Г. Циглер ; пер. 4-го англ. изд. — 2-е изд., доп. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — 288 с. : ил.

ISBN 978-5-9963-0629-9

В книге собраны красивые и глубокие теоремы из различных областей теории чисел, геометрии, анализа, комбинаторики, теории графов. Доказательства этих теорем используют неожиданные сочетания разнородных идей. Изложение материала сопровождается большим числом иллюстраций.

Книга предназначена всем, кто увлечен математикой: в первую очередь студентам, аспирантам, а также преподавателям, научным работникам и просто любителям изящных математических рассуждений. Многое в книге доступно школьникам старших классов.

УДК 51.1
ББК 22.1

16+

Научно-популярное издание

Айгнер Мартин
Циглер Гюнтер

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ИЗ КНИГИ

Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней

Ведущий редактор *М. С. Стригунова*. Редактор *А. С. Попов*
Художественный редактор *Н. А. Новак*
Технический редактор *Е. В. Денюкова*
Оригинал-макет подготовлен *И. А. Зубковым, А. М. Зубковым* в пакете $\LaTeX\,2_\varepsilon$

Подписано в печать 26.06.14. Формат 84×108/16.
Усл. печ. л. 30,24. Тираж 1000 экз. Заказ

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272, e-mail: binom@Lbz.ru, http://www.Lbz.ru

ISBN 978-5-9963-0629-9

Оглавление

Предисловие редактора перевода ... 5

Предисловие ... 6

Предисловие к четвертому изданию ... 7

Предисловие ко второму русскому изданию ... 8

Теория чисел ... 9

1. Шесть доказательств бесконечности множества простых чисел 10
2. Постулат Бертрана ... 15
3. Биномиальные коэффициенты (почти) никогда не являются степенями ... 22
4. Представления чисел в виде сумм двух квадратов ... 26
5. Закон взаимности квадратичных вычетов ... 32
6. Каждое конечное кольцо с делением – поле ... 41
7. Некоторые иррациональные числа ... 46
8. Три раза о $\pi^2/6$ ... 53

Геометрия ... 61

9. Третья проблема Гильберта: разбиения многогранников ... 62
10. Прямые на плоскости и разложения графов ... 71
11. Задача о направлениях ... 77
12. Три применения формулы Эйлера ... 83
13. Теорема Коши о жесткости ... 90
14. Касание симплексов ... 94
15. Каждое большое точечное множество имеет тупой угол ... 98
16. Гипотеза Борсука ... 105

Математический анализ ... 113

17. Множества, функции и гипотеза континуума ... 114
18. Во славу неравенств ... 131

19. Основная теорема алгебры ... 138
20. Один квадрат и нечетное число треугольников ... 141
21. Теорема Пойа о многочленах ... 150
22. О лемме Литтлвуда и Оффорда ... 156
23. Котангенс и прием Герглотца ... 160
24. Задача Бюффона об игле ... 166

Комбинаторика ... 171

25. Принцип Дирихле и двойной счет ... 172
26. Плиточные разбиения прямоугольников ... 184
27. Три знаменитых теоремы о конечных множествах ... 189
28. Тасование карт ... 194
29. Пути на решетке и определители ... 205
30. Формула Кэли для числа деревьев ... 211
31. Тождества и биекции ... 218
32. Дополнения до полных латинских квадратов ... 224

Теория графов ... 231

33. Задача Диница ... 232
34. Задача о пяти красках для плоских графов ... 238
35. Как охранять музей ... 242
36. Теорема Турана о графах ... 246
37. Связь без ошибок ... 251
38. Хроматическое число графов Кнезера ... 261
39. О друзьях и политиках ... 267
40. Вероятность (иногда) упрощает перечисление ... 270

Об иллюстрациях ... 280

Предметный указатель ... 281

Предисловие редактора перевода

Появление монографии «Доказательства из Книги», на мой взгляд, является выдающимся событием: редко бывает, чтобы математическая книга (не учебник!) за 5 лет переиздавалась 2 раза. Мартин Айгнер и Гюнтер Циглер, основываясь на предложениях и рекомендациях Пауля Эрдёша, собрали много замечательных и удивительных результатов из различных областей математики (теории чисел, геометрии, анализа, комбинаторики, теории графов) и сумели с блеском изложить их полные, но краткие доказательства, которые используют неожиданные сочетания разнородных идей. Текст удачно дополняют со вкусом подобранные и специально для этой книги сделанные рисунки.

В чем-то аналогами «Доказательств из Книги» были знаменитые «Числа и фигуры» Радемахера и Теплица, а также некоторые книги из издававшейся в СССР серии «Библиотека математического кружка». Однако в отличие от них цель «Доказательств из Книги» — не столько изложить какие-то части математических теорий, сколько предоставить читателю возможность насладиться изяществом математических рассуждений и почувствовать единство областей математики, кажущихся далекими друг от друга. Кроме того, «Доказательства из Книги» интересны для *всех* любителей математики, в том числе для увлеченных ею школьников (хотя доказательства в книге часто сложнее решений олимпиадных задач и требуют больше знаний), для студентов, аспирантов, преподавателей и для математиков-профессионалов. С этой точки зрения она не имеет аналогов.

Конечно, на отбор тем повлияли вкусы Пауля Эрдёша и ее авторов. Конечно, в других областях математики тоже есть красивые теоремы с замечательными доказательствами. Возможно, эта книга стимулирует их популяризацию.

Надеюсь, что при переводе удалось сохранить непринужденный стиль изложения авторов. С их согласия был добавлен ряд замечаний (как правило — чтобы упростить понимание материала), а также расширены списки литературы к нескольким главам (ссылки, добавленные при переводе, отмечены звездочками).

Москва, ноябрь 2005 года *А.Зубков*

Первое издание «Доказательств из Книги» на русском языке (М.: Мир, 2006) сразу стало библиографической редкостью. Новое издание соответствует 4-му англоязычному изданию 2010 года, в которое авторы добавили 5 новых интересных глав и внесли изменения в другие главы.

Москва, февраль 2014 года *А.Зубков*

Предисловие

Пауль Эрдёш

Пауль Эрдёш, вспоминая афоризм Г. Г. Харди о том, что для скверной математики не должно быть места, любил говорить о Книге, в которую Бог включает совершенные доказательства математических теорем. Эрдёш говорил также, что вы не обязаны верить в Бога, но как математик вы должны верить в Книгу. Несколько лет тому назад мы предложили ему написать первое (и достаточно скромное) приближение к Книге. Пауль с энтузиазмом воспринял эту идею и, что характерно для него, немедленно начал работу, заполняя страницу за страницей своими предложениями. Предполагалось, что наша книга появится в качестве подарка к 85-летию Эрдёша в марте 1998 года. К несчастью, летом 1996 года Пауль умер, что не позволило включить его в список соавторов. Вместо этого мы посвятили ему эту книгу.

«Книга»

У нас нет определения или четкого описания условий включения доказательства в Книгу. Все, что мы здесь предлагаем, — примеры, которые выбраны в надежде на то, что читатели разделят наш восторг от блестящих идей, тонкой интуиции и удивительных наблюдений. Мы надеемся также, что читатели получат удовольствие от книги, несмотря на несовершенство нашего изложения. Отбор доказательств был произведен в значительной степени под влиянием самого Пауля Эрдёша. Он предложил широкий список тем. Многие из доказательств найдены Эрдёшем или инициированы его удивительной способностью ставить правильные вопросы и выдвигать правильные гипотезы. Так что эта книга в большой степени отражает взгляды Пауля Эрдёша на то, каким должно быть доказательство из Книги.

Выбор тем ограничивался нашим желанием сделать материал книги доступным для читателей, подготовка которых лишь в малой степени включает технику студентов-математиков последних курсов. Немного сведений из линейной алгебры, основы анализа и теории чисел, довольно приличный объем элементарных понятий и соображений из дискретной математики достаточны для того, чтобы понимать написанное в этой книге и получать от этого удовольствие.

Мы чрезвычайно благодарны многим людям, которые помогали нам и поддерживали нас в работе над этим проектом. Среди них студенты семинара, на котором мы обсуждали предварительную версию книги: Бенно Артман, Стефан Брандт, Стефан Фельснер, Эли Гудман, Торстен Хелдман и Ханс Мильке. Мы благодарны Маргрит Баррет, Христиану Бресслеру, Евгению Гаврилову, Михаэлю Есвигу, Елке Позе и Йору Рамбау за техническую помощь в составлении книги. Мы многим обязаны Тому Троттеру, который прочитал рукопись от первой до последней страницы, Карлу Х. Хоффману за его удивительные рисунки, и более всего великому ушедшему от нас Паулю Эрдёшу.

Берлин, март 1998 года *Мартин Айгнер, Гюнтер М. Циглер*

Предисловие к четвертому изданию

Когда почти пятнадцать лет назад мы начинали этот проект, то не представляли себе, какие замечательные и непрекращающиеся отклики вызовет наша книга о Книге, сколько мы получим писем с благодарностями, интересными комментариями, сколько будет новых изданий и — к настоящему времени — тринадцать переводов. Не будет преувеличением сказать, что он стал частью наших жизней.

Кроме многочисленных улучшений, частично предложенных нашими читателями, настоящее четвертое издание содержит пять новых глав: две классические, о законе взаимности квадратичных вычетов и об основной теореме алгебры, две главы о разбиениях и их увлекательных решениях, и о прорыве в теории графов — хроматических числах графов Кнезера.

Мы благодарны всем, кто помогал нам и поддерживал нас все это время. По второму изданию этот список включает Стефана Брандта, Кристиана Элшольца, Юргена Элстродта, Дэниела Грайзера, Роджера Хит-Брауна, Ли Л.Кинера, Кристиана Лебофа, Ханфрида Ленца, Николаса Печа, Джона Скоулса, Бернульфа Вайсбаха и *многих* других. Заметно улучшили третье издание вклады Дэвида Бевэна, Андерса Бьернера, Дитриха Брэсса, Джона Косгрейва, Хьюберта Калфа, Гюнтера Пикерта, Алистера Синклэра и Херба Вилфа. За советы при подготовке настоящего четвертого издания мы особенно признательны Франсу Дакару, Оливеру Дайзеру, Антону Дохтерману, Михаэлю Харбеку, Стефану Хоугарди, Хендрику В.Ленстре, Гюнтеру Роту, Морису Шмитту и Карстену Шульцу. Мы благодарим Рут Аллевельт из издательства Шпрингер в Гейдельберге, а также Кристофа Эйриха, Торстена Хельдмана и Элке Поза из Берлина за помощь и поддержку в течение всех этих лет. Наконец, несомненно, вид этой книги был бы другим без оригинального оформления, предложенного Карлом-Фридрихом Кохом, и превосходных новых рисунков, которые к каждому изданию готовил Карл Х. Хоффман.

Берлин, июль 2009 года *Мартин Айгнер, Гюнтер М. Циглер*

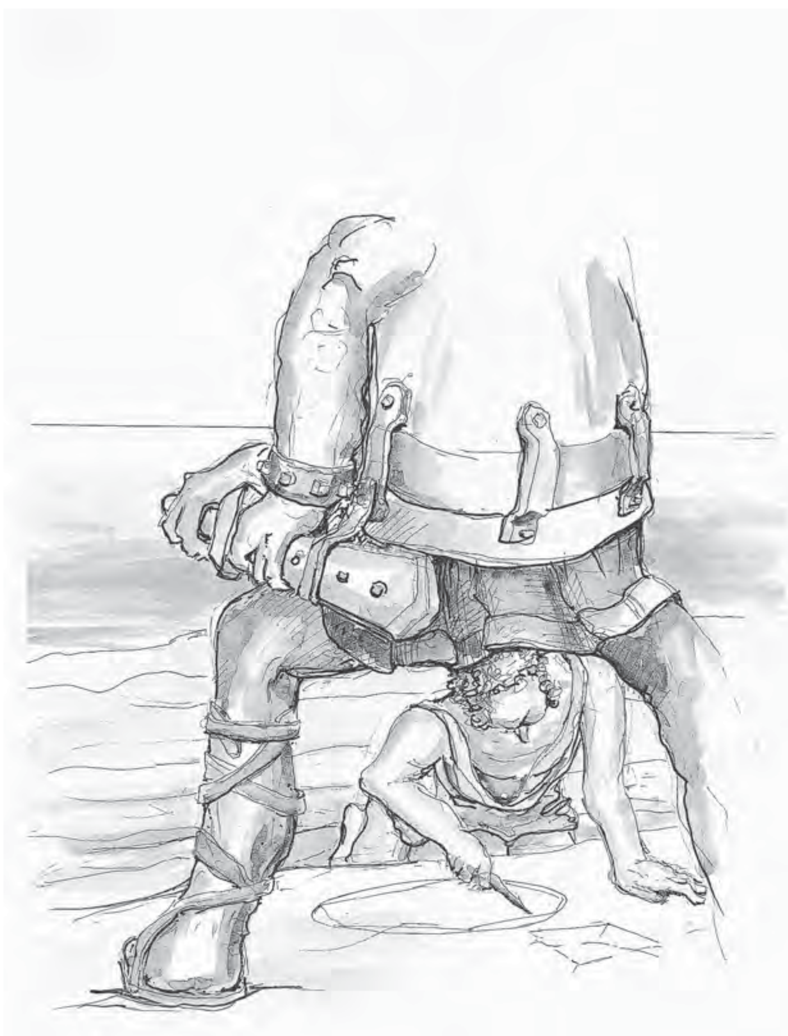
Предисловие ко второму русскому изданию

Когда мы представляли наш первый англоязычный вариант «Доказательств из Книги» на Международном математическом конгрессе в Берлине в 1998 году, мы не были уверены в том, как он будет встречен — и были поражены откликом. Мы тогда думали также, что закончили (всю необходимую) работу — но оказались не правы. Наоборот, этот проект развивался далее, окрыляемый откликами и предложениями наших читателей из разных стран, в частности, специалистов, переводивших книгу на разные языки.

Поэтому мы чрезвычайно рады тому, что первое русское издание получило такой замечательный прием (что подтверждается прекрасными письмами и e-mail'ами), а также желанию сделать расширенное четвертое английское издание нашей книги доступным для русских читателей. Мы признательны А. М. Зубкову и Б. И. Селиванову за их большой труд, внимание и знания, которые они вложили в этот перевод. Мы надеемся, что второе русское издание для многих читателей окажется полезным, поучительным и доставит им удовольствие.

Берлин, февраль 2014 года *Мартин Айгнер, Гюнтер М. Циглер*

Теория чисел



«Иррациональность и π»

1
Шесть доказательств бесконечности множества простых чисел *10*

2
Постулат Бертрана *15*

3
Биномиальные коэффициенты (почти) никогда не являются степенями *22*

4
Представление чисел в виде сумм двух квадратов *26*

5
Закон взаимности квадратичных вычетов . . *32*

6
Каждое конечное кольцо с делением – поле *41*

7
Некоторые иррациональные числа . . . *46*

8
Три раза о $\pi^2/6$ *53*

Глава 1 Шесть доказательств бесконечности множества простых чисел

Очень естественно начать эти заметки, по-видимому, старейшим доказательством из Книги, которое обычно приписывают Евклиду (Начала, IX, см. [5*]). Оно обосновывает бесконечность последовательности простых чисел.

■ **Доказательство Евклида.** Для любого конечного множества простых $\{p_1, \ldots, p_r\}$ рассмотрим число $n = p_1 p_2 \cdots p_r + 1$. Это n имеет простой делитель p, который не совпадает ни с одним из чисел p_i, $i = 1, \ldots, r$: в противном случае p был бы делителем и n, и произведения $p_1 p_2 \cdots p_r$ и, следовательно, разности $n - p_1 p_2 \ldots p_r = 1$, что невозможно. Поэтому никакое конечное множество $\{p_1, \ldots, p_r\}$ не может быть совокупностью всех простых чисел. □

Зафиксируем следующие обозначения: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ — множество целых чисел и $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$ — множество простых чисел.

Ниже приводится несколько других доказательств (выбранных из значительно большей коллекции); мы надеемся, что они понравятся читателю почти так же, как и нам. В них используются различные подходы, но для всех доказательств следующие базисные идеи являются общими: последовательность натуральных чисел неограниченно возрастает, каждое натуральное число $n \geq 2$ имеет простой делитель. Вместе эти два факта обусловливают бесконечность $\mathbb{P}$.

Второе доказательство предложил Кристиан Гольдбах (в письме Леонарду Эйлеру в 1730 году), третье, видимо, относится к фольклору, четвертое найдено Эйлером [3], пятое доказательство предложил Гарри Фюрстенберг [4], а последнее принадлежит Паулю Эрдёшу [2].

■ **Второе доказательство.** Вначале рассмотрим *числа Ферма* $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Покажем, что любые два числа Ферма взаимно просты; отсюда следует, что число простых чисел бесконечно. Для этого достаточно доказать рекуррентное соотношение

$$\prod_{k=0}^{n-1} F_k \quad = \quad F_n - 2 \qquad (n \geq 1),$$

$$\begin{aligned} F_0 &= 3 \\ F_1 &= 5 \\ F_2 &= 17 \\ F_3 &= 257 \\ F_4 &= 65537 \\ F_5 &= 641 \cdot 6700417 \end{aligned}$$

Несколько первых чисел Ферма

из которого немедленно вытекает наше утверждение: если m делит, скажем, F_k и F_n $(k < n)$, то m делит 2 и поэтому m равно 1 или 2. Но равенство $m = 2$ невозможно, так как все числа Ферма нечетны.

Чтобы доказать рекуррентное соотношение, воспользуемся индукцией по n. Для $n = 1$ имеем $F_0 = 3$ и $F_1 - 2 = 3$. Теперь, учитывая предположение индукции, получаем

$$\prod_{k=0}^{n} F_k = \Big(\prod_{k=0}^{n-1} F_k\Big) F_n = (F_n - 2)F_n =$$
$$= (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1) = 2^{2^{n+1}} - 1 = F_{n+1} - 2.$$

□

■ **Третье доказательство.** Предположим, что $\mathbb{P}$ конечно и что p — наибольшее простое число. Рассмотрим так называемое *число Мерсенна*[1] $2^p - 1$ и покажем, что любой простой делитель q числа $2^p - 1$ больше p, что и даст желаемое противоречие. Пусть q — простой делитель $2^p - 1$, так что $2^p \equiv 1 \pmod q$. Поскольку p — простое число, это означает, что элемент 2 имеет порядок p в мультипликативной группе $\mathbb{Z}_q \backslash \{0\}$ конечного поля $\mathbb{Z}_q$. Эта группа содержит $q-1$ элементов. В силу теоремы Лагранжа (см. вставку на полях) порядок любого элемента делит порядок группы, т. е. $p \mid q-1$, и, значит, $p < q$. □

Теперь рассмотрим доказательство, в котором используются элементы математического анализа.

■ **Четвертое доказательство.** Пусть $\pi(x) := \#\{p \le x : p \in \mathbb{P}\}$ — число простых, не превосходящих действительного числа x. Перенумеруем простые числа в $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ в возрастающем порядке. Рассматривая натуральный логарифм $\ln x$, будем использовать известное из анализа равенство $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.

Сравним теперь площадь под графиком функции $f(t) = \frac{1}{t}$ с площадью под графиком ступенчатой функции $g(t) = \frac{1}{[t]}$. (Об этом приеме см. также приложение к гл. 2 на с. 19.) Тогда при $n \le x < n+1$

$$\ln x \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \le$$
$$\le \sum \frac{1}{m}, \text{ где сумма берется по всем } m \in \mathbb{N}, \text{ все простые делители которых не больше } x.$$

Так как каждое такое m можно *единственным* образом записать в виде произведения $\prod\limits_{p \le x} p^{k_p}$, где $k_p \ge 0$, то сумма в правой части равна

$$\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\le x}} \Big(\sum_{k\ge 0} \frac{1}{p^k}\Big).$$

Под знаком произведения стоят суммы членов геометрических прогрессий со знаменателями $\frac{1}{p}$. Следовательно,

$$\ln x \le \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\le x}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\le x}} \frac{p}{p-1} = \prod_{k=1}^{\pi(x)} \frac{p_k}{p_k - 1}.$$

[1] Марен Мерсенн (1588–1648) — французский математик, физик и философ. — *Прим. ред.*

Теорема Лагранжа

Если G — конечная (мультипликативная) группа и U — ее подгруппа, то $|U|$ (число элементов U) делит $|G|$.

■ **Доказательство.** Рассмотрим бинарное отношение

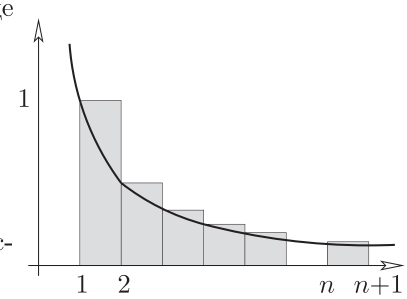
$$a \sim b :\Longleftrightarrow ba^{-1} \in U.$$

Из определения группы следует, что $\sim$ есть отношение эквивалентности. Содержащий элемент a класс эквивалентности совпадает с классом смежности

$$Ua = \{xa : x \in U\}.$$

Ясно, что $|Ua| = |U|$, поэтому G разбивается на классы эквивалентности, каждый из которых имеет $|U|$ элементов. Отсюда вытекает, что $|U|$ делит $|G|$. □

Частный случай: пусть $U = \{a, a^2, \ldots, a^m\}$ — циклическая подгруппа и m — наименьшее положительное целое число, для которого $a^m = 1$ (такое число называется *порядком* элемента a). Согласно теореме Лагранжа порядок элемента a делит порядок $|G|$ группы G.



Функция $f(t) = \frac{1}{t}$ и ступенчатая функция $g(t) = \frac{1}{[t]}$

Ясно, что $p_k \geq k+1$, и поэтому

$$\frac{p_k}{p_k - 1} \;=\; 1 + \frac{1}{p_k - 1} \;\leq\; 1 + \frac{1}{k} \;=\; \frac{k+1}{k},$$

вследствие чего

$$\ln x \;\leq\; \prod_{k=1}^{\pi(x)} \frac{k+1}{k} \;=\; \pi(x) + 1.$$

Функция $\ln x$ не ограничена. Поэтому $\pi(x)$ тоже не ограничена, а это значит, что существует бесконечно много простых чисел. $\square$

«Запускаем плоские камушки в бесконечность»

■ **Пятое доказательство.** Теперь после аналитического дадим топологическое доказательство. Рассмотрим следующую занятную топологию на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел. Положим для $a,\ b \in \mathbb{Z},\ b > 0$,

$$N_{a,b} = \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Каждое множество $N_{a,b}$ есть бесконечная в обе стороны арифметическая прогрессия. Назовем множество $O \subseteq \mathbb{Z}$ *открытым*, если O пусто или если для каждого $a \in O$ существует такое $b > 0$, что $N_{a,b} \subseteq O$. (*Замкнутыми* называются множества $S \subseteq \mathbb{Z}$, дополнения $\mathbb{Z} \backslash S$ к которым открыты, и только такие множества. — *Прим. ред.*) Ясно, что объединение открытых множеств является открытым. Если O_1, O_2 — открытые множества и $a \in O_1 \cap O_2$, причем $N_{a,b_1} \subseteq O_1$ и $N_{a,b_2} \subseteq O_2$ для некоторых $b_1,\ b_2 \in \mathbb{Z}$, то $a \in N_{a,b_1 b_2} \subseteq O_1 \cap O_2$. Поэтому любое конечное пересечение открытых множеств тоже открыто[2]. Это семейство открытых множеств индуцирует топологию на $\mathbb{Z}$.

Теперь отметим два факта:

(A) Любое непустое открытое множество бесконечно.

(B) Любое множество $N_{a,b}$ является замкнутым.

В самом деле, (A) следует из определения. Далее, заметим, что

$$N_{a,b} \;=\; \mathbb{Z} \backslash \bigcup_{i=1}^{b-1} N_{a+i,b},$$

значит, $N_{a,b}$ замкнуто как дополнение к открытому множеству.

До сих пор о простых числах мы не упоминали; теперь, наконец, они появляются.

Так как любое число $n \neq 1, -1$ имеет некоторый простой делитель p и, следовательно, содержится в $N_{0,p}$, мы приходим к выводу, что

$$\mathbb{Z} \backslash \{1, -1\} \;=\; \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}.$$

Если бы $\mathbb{P}$ было конечно, то $\bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$ было бы замкнуто как конечное объединение замкнутых согласно (B) множеств. Поэтому $\{1, -1\}$ как дополнение к замкнутому множеству было бы открытым, что противоречит (A). $\square$

[2] Из этого свойства и правил теоретико-множественных операций следует, что объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто (как дополнение к пересечению их дополнений). — *Прим. ред.*

■ **Шестое доказательство.** Наше последнее доказательство значительно более содержательно и обосновывает не только бесконечность множества простых чисел, но и расходимость ряда $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$. Первое доказательство этого важного результата было получено Эйлером (и оно по-своему интересно), но приведенное ниже доказательство, изобретенное Эрдёшем, очень красиво.

Пусть $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — последовательность простых чисел в возрастающем порядке. Предположим, что ряд $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ сходится. Тогда существует такое натуральное число k, что

$$\sum_{i\geq k+1} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}\,.$$

Следовательно, для произвольного натурального числа N

$$\sum_{i\geq k+1} \frac{N}{p_i} \;\;<\;\; \frac{N}{2}\,. \tag{1}$$

Назовем $p_1, \ldots, p_k$ *малыми* простыми числами, а $p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots$ — *большими* простыми числами.

Пусть N_b — количество положительных целых $n \leq N$, которые делятся хотя бы на одно большое простое число, и N_s — количество положительных целых $n \leq N$, имеющих лишь малые простые делители. Покажем, что для некоторого $N < \infty$ имеет место неравенство

$$N_b + N_s \;\;<\;\; N,$$

которое даст нам желаемое противоречие, так как по определению сумма $N_b + N_s$ должна равняться N.

Заметим, что $\lfloor \frac{N}{p_i} \rfloor$ равно количеству положительных целых чисел $n \leq N$, кратных p_i (символом $\lfloor x \rfloor$ здесь и далее обозначается наибольшее целое, не превосходящее x, а символом $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое, которое не меньше x. — *Прим. перев.*). Поэтому в силу (1) получаем

$$N_b \;\leq\; \sum_{i\geq k+1} \left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor \;<\; \frac{N}{2}\,. \tag{2}$$

Теперь рассмотрим N_s. Запишем каждое $n \leq N$, имеющее лишь малые простые делители, в виде $n = a_n b_n^2$, где множитель a_n свободен от квадратов, т. е. каждое a_n есть произведение *различных* малых простых чисел. Отсюда вытекает, что имеется ровно 2^k различных свободных от квадратов множителей. Далее, так как $b_n \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{N}$, то существует не более $\sqrt{N}$ различных квадратов, меньших N, и поэтому

$$N_s \;\;\leq\;\; 2^k\sqrt{N}.$$

Поскольку (2) справедливо для *произвольного* N, остается лишь найти такое число N, что $2^k\sqrt{N} \leq \frac{N}{2}$, или $2^{k+1} \leq \sqrt{N}$, для чего достаточно положить $N = 2^{2k+2}$. □

Литература

[1] Artmann B. *Euclid — The Creation of Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1999.

[2] Erdös P. *Über die Reihe* $\sum \frac{1}{p}$, Mathematica, Zutphen B, **7** (1938), 1–2.

[3] Euler L. *Introductio in Analysin Infinitorum,* Tomus Primus, Lausanne 1748; Opera Omnia, Ser. 1, Vol. 8. [Имеется перевод: Эйлер Л. *Введение в анализ бесконечных*, т. 1. М.: Физматгиз, 1961.]

[4] Fürstenberg H. *On the infinitude of primes,* Amer. Math. Monthly, **62** (1955), 353.

[5*] Евклид. *Начала, кн. VII–X.* М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.

Постулат Бертрана

Глава 2

Мы видели, что последовательность простых чисел $2, 3, 5, 7, \ldots$ бесконечна. Чтобы показать, что размеры лакун (промежутков между соседними числами) в ней не ограничены, обозначим через

$$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p$$

произведение всех простых чисел, которые меньше $k + 2$. Заметим, что ни одно из k чисел

$$N + 2, N + 3, N + 4, \ldots, N + k, N + (k + 1)$$

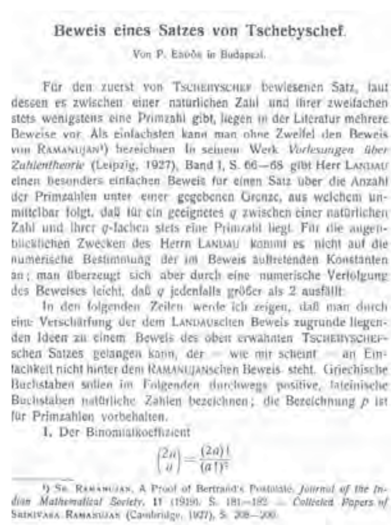
не является простым, так как простые делители любого числа $i = 2, 3, \ldots, k + 1$ меньше $k + 2$ и делят N; следовательно, они делят также $N + i$. С помощью этого приема мы находим, например, для $k = 10$, что ни одно из чисел

$$2312, 2313, 2314, \ldots, 2321$$

не является простым.

Существуют также верхние оценки для лакун в последовательности простых чисел. Согласно самой известной оценке, «лакуна до следующего простого не может быть больше числа, с которой она начинается». Это утверждение называют постулатом Бертрана, так как оно было высказано в форме предположения и проверено эмпирически для $n < 3\,000\,000$ Джозефом Бертраном. Впервые оно было доказано Пафнутием Чебышёвым около 1850 года [5*]. Значительно более простое доказательство нашел индийский гений Рамануджан. Доказательство в нашей книге принадлежит Паулю Эрдёшу. Оно взято из его первой статьи [1], опубликованной в 1932 году, когда Эрдёшу было 19 лет.

Джозеф Бертран



Beweis eines Satzes von Tschebyschef.

Von P. Erdős in Budapest.

Für den zuerst von Tschebyschef bewiesenen Satz, laut dessen es zwischen einer natürlichen Zahl und ihrer zweifachen stets wenigstens eine Primzahl gibt, liegen in der Literatur mehrere Beweise vor. Als einfachsten kann man ohne Zweifel den Beweis von Ramanujan[1]) bezeichnen. In seinem Werk *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Leipzig, 1927), Band I, S. 66—68 gibt Herr Landau einen besonders einfachen Beweis für einen Satz über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze, aus welchem unmittelbar folgt, daß für ein geeignetes q zwischen einer natürlichen Zahl und ihrer q-fachen stets eine Primzahl liegt. Für die augenblicklichen Zwecken des Herrn Landau kommt es nicht auf die numerische Bestimmung der im Beweis auftretenden Konstanten an; man überzeugt sich aber durch eine numerische Verfolgung des Beweises leicht, daß q jedenfalls größer als 2 ausfällt.

In den folgenden Zeilen werde ich zeigen, daß man durch eine Verschärfung der dem Landauschen Beweis zugrunde liegenden Ideen zu einem Beweis des oben erwähnten Tschebyschefschen Satzes gelangen kann, der — wie mir scheint — an Einfachkeit nicht hinter dem Ramanujanschen Beweis steht. Griechische Buchstaben sollen im Folgenden durchwegs positive, lateinische Buchstaben natürliche Zahlen bezeichnen; die Bezeichnung p ist für Primzahlen vorbehalten.

I. Der Binomialkoeffizient

$$\binom{2a}{a} = \frac{(2a)!}{(a!)^2}$$

[1]) Sr. Ramanujan, A Proof of Bertrand's Postulate. *Journal of the Indian Mathematical Society*, 11 (1919), S. 181—182. — *Collected Papers of* Srinivasa Ramanujan (Cambridge, 1927), S. 208—209.

> **Постулат Бертрана.**
> *Для каждого $n \geq 1$ существует такое простое число p, что $n < p \leq 2n$.*

■ **Доказательство.** Мы получим достаточно хорошую оценку биномиального коэффициента $\binom{2n}{n}$ и с ее помощью покажем, что если бы он не имел простых делителей p, лежащих между n и $2n$, то он был бы «слишком мал». Наше рассуждение состоит из пяти шагов.

(1) Вначале докажем постулат Бертрана для $n < 4000$. Для этого нет необходимости проверять 4000 вариантов: достаточно (используя «прием Ландау») проверить, что

$$2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631, 1259, 2503, 4001$$

[. . .]

В книге приведены красивые и изящные доказательства многих результатов. Среди них:

- Бесконечность множества простых чисел
- Представление чисел в виде суммы двух квадратов
- Третья проблема Гильберта
- Теорема Коши о жесткости
- Гипотеза Борсука
- Теорема Пойа о многочленах
- Задача Бюффона об игле
- Формула Кэли для числа деревьев
- Задача Диница
- Задача о пяти красках для плоских графов
- Теорема Турана для графов

Мартин Айгнер и Гюнтер Циглер, основываясь на предложениях и рекомендациях Пауля Эрдёша, собрали много замечательных и удивительных результатов из различных областей математики (теории чисел, геометрии, анализа, комбинаторики, теории графов) и сумели с блеском изложить их полные, но краткие доказательства, которые используют неожиданные сочетания разнородных идей. Текст удачно дополняют со вкусом подобранные и специально для этой книги сделанные рисунки.

Цель «Доказательств из Книги» – не столько изложить какие-то части математических теорий, сколько предоставить читателю возможность насладиться изяществом математических рассуждений и почувствовать единство областей математики, кажущихся далекими друг от друга.

Из предисловия редактора перевода