ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое учебное пособие написано в соответствии с программой, подготовленной кафедрой алгебры и геометрии и методики их преподавания государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский городской педагогический университет». Пособие предназначено студентам, будущим бакалаврам, обучающимся по направлению «Педагогическое образование» и осваивающим профиль «Математика». Оно также будет полезно студентам-бакалаврам, обучающимся по профилям «Информатика», «Физика» и «Технология». Пособие пригодится и магистрантам, осваивающим соответствующие программы магистратуры.

Пособие включает следующие разделы: векторы на плоскости и в пространстве, метод координат, прямые и кривые второго порядка на плоскости, плоскости, прямые и поверхности второго порядка в пространстве, геометрические преобразования, геометрические построения на плоскости. В пособии представлен материал первой части единого курса геометрии, изучение которого необходимо будущему учителю математики для успешной работы со школьниками. Изложение ведется в традиционной, векторно-координатной форме. При этом авторы постарались обстоятельно рассмотреть основы, достаточно подробно доказать свойства линейных операций над векторами, скалярного, векторного и смешанного произведений векторов, ориентации плоскости и пространства.

Следует отметить, что Федеральный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению «Педагогическое образование», по которому в настоящее время ведется подготовка будущих учителей, на 10% учебного времени увеличил долю самостоятельной работы студентов-бакалавров. Организацию учебного процесса требуется планировать из расчета 50% аудиторных и 50% самостоятельных занятий. Сократилось число аудиторных часов, в связи с этим пришлось пересмотреть программу курса геометрии, оставив в ней материал, необходимый для подготовки учителя математики. В частности, пришлось исключить раздел «Многомерная геометрия», традиционно присутствовавший в предшествующих программах. Его можно изложить факультативно или в рамках дисциплин по выбору. Существенно возросла роль учебных пособий, представляющих преподавателям и студентам возможность эффективной организации самостоятельной работы. Авторы предприняли все усилия для выполнения этого условия. Преподаватели и студенты найдут в пособии весь необходимый для этого материал, изложенный в достаточно подробной форме.

Отличительная особенность предлагаемого пособия состоит в его практической направленности. По мнению авторов, будущему школьному учителю математики недостаточно освоить указанные разделы, необходимо понимать их взаимосвязь со школьной математикой и научиться применять их материал к решению задач элементарной геометрии. Поэтому уделено особое внимание приложениям векторной алгебры, метода координат, теории преобразований и других разделов пособия к проблемам методики и практики решения задач школьной геометрии.

Пособие пригодится также и учителям средней школы. Они найдут в нем полезный материал для применения векторной алгебры, координатного метода, теории преобразований и геометрических построений на плоскости циркулем и линейкой к решению задач школьной геометрии.

Главы 1—5 подготовлены профессором С.Л. Атанасяном, а глава 6 — доцентом В.Г. Покровским. Общая редакция осуществлена профессором С.Л. Атанасяном.

Глава I

ВЕКТОРЫ И ИХ СВОЙСТВА

§ 1. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Из школьных курсов математики и физики нам известно, что в естествознании используются величины, характеризуемые не только числовым значением, но и направлением (например, скорость, ускорение, сила и т. д.). Такого рода объекты носят название векторов. В переводе с латинского языка «вектор» означает «переносить». Впервые векторы в значении, близком к современному, рассматривались в книге ирландского математика и механика У. Гамильтона «Лекции о кватернионах» (1853 г.). В современном виде векторное исчисление было изложено в работах американского физика Д. Гиббса «Элементы векторного исчисления» (1881—1884 гг.) и английского физика О. Хевисайда «Электромагнитная теория» (1893 г.). Систематическое изложение векторного исчисления неслучайно появилось в трудах ученых, занимавшихся проблемами естествознания и физики. Оно позволяет наглядно и просто описать сложные математические и физические явления. Поэтому начала векторного исчисления изучаются в школе, они также составляют основу данного курса.

Как известно, в школьном курсе геометрии векторы отождествляются с направленными отрезками. Такое представление удобно для упрощенного изложения свойств векторов, но не является математически корректным. Однако для изучения свойств векторов направленные отрезки нам понадобятся. Отрезок называется *направленным*, если для него указан порядок его концов. Первый из них называется *началом*, а второй — *концом* направленного отрезка. На рисунках конец такого отрезка обозначается стрелкой (рис. 1). Если M — начало, а N — конец направленного отрезка, то будем его обозначать как $\overline{MN}$.

Определение 1. *Направленные отрезки, расположенные на одной прямой или на параллельных прямых, называются коллинеарными. Если коллинеарные направленные отрезки имеют одинаковые направления, то они называются сонаправленными, если их направления различны, то противоположно направленными.*

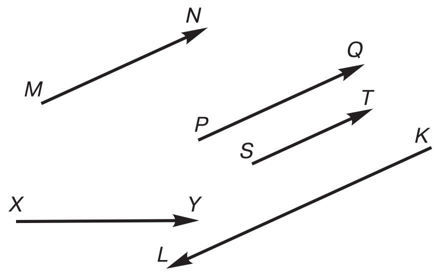

Рис. 1

Коллинеарные направленные отрезки будем обозначать как $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$. Сонаправленные и противоположно направленные отрезки обозначаются соответственно через $\overline{MN} \uparrow\uparrow \overline{PQ}$ и $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$. На рисунке 1 отрезки $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ и $\overline{ST}$ сонаправлены между собой, а отрезок $\overline{KL}$ им противоположно направлен. На этом же рисунке отрезок $\overline{XY}$ не коллинеарен отрезкам $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$, $\overline{ST}$ и $\overline{KL}$, поэтому он не сонаправлен и не противоположно направлен этим отрезкам.

Отметим признак сонаправленности отрезков. Пусть $\overline{MN}$ и $\overline{PQ}$ — коллинеарные направленные отрезки, не лежащие на одной прямой. Ясно, что отрезки сонаправлены в том и только в том случае, когда их концы N и Q лежат в одной полуплоскости относительно прямой MP, проходящей через их начала (рис. 2, a). Отсюда следует, что $\overline{MN} \uparrow\uparrow \overline{PQ}$ тогда и только тогда, когда отрезки MP и NQ не пересекаются. Если $\overline{MN}$ и $\overline{PQ}$ противоположно направлены и не лежат на одной прямой, то их концы N и Q принадлежат различным полуплоскостям относительно

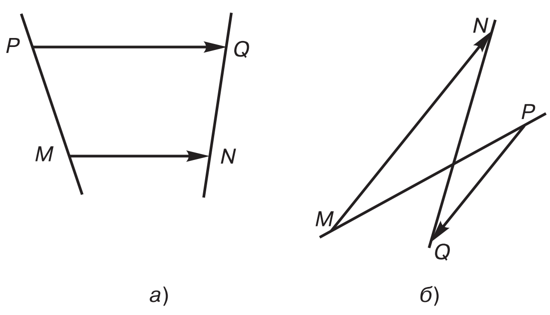

Рис. 2

прямой MP. Таким образом, $\overline{MN} \uparrow\downarrow \overline{PQ}$ в том и только в том случае, когда отрезки MP и NQ пересекаются (рис. 2, *б*).

Под *длиной* направленного отрезка $\overline{AB}$ понимается расстояние между точками A и B. Направленный отрезок называется *нулевым*, если его начало совпадает с его концом. У такого отрезка длина равна нулю. Считается, что его направление произвольное, т. е. *он сонаправлен с любым отрезком*. Будем его обозначать как $\overline{0}$.

Из курса алгебры известно, что под *бинарным отношением* Δ на множестве M понимается такое соответствие между элементами этого множества, что для любых двух элементов a и b из M можно сказать, находятся ли они в этом отношении (соответствуют друг другу, $a \,\Delta\, b$) или нет. Такое отношение называется *отношением эквивалентности*, если выполнены следующие три условия:

1) *рефлексивности* — любой элемент множества находится в бинарном отношении сам с собой ($a \,\Delta\, a$);
2) *симметричности* — если элемент a находится в бинарном отношении с элементом b, то b также находится в бинарном отношении с элементом a (если $a \,\Delta\, b$, то $b \,\Delta\, a$);
3) *транзитивности* — если элемент a находится в бинарном отношении с элементом b, а b, в свою очередь, с элементом c, то a находится в том же отношении с c (если $a \,\Delta\, b$ и $b \,\Delta\, c$, то $a \,\Delta\, c$).

Пример 1. *На множестве направленных отрезков введено бинарное отношение Δ: два отрезка находятся в этом отношении, если они коллинеарны. Является ли Δ отношением эквивалентности?*

Решение. Выясним, удовлетворяет ли данное отношение условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Условие рефлексивности выполнено, так как направленный отрезок коллинеарен сам себе. Легко видеть, что условие симметричности также выполнено. Выясним, выполняется ли условие транзитивности. Нам следует проверить, что из $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ и $\overline{CD} \parallel \overline{MN}$ вытекает $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$. Покажем, что эти условия выполняются не для любых направленных отрезков $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ и $\overline{MN}$. Действительно, пусть $\overline{CD} = \overline{0}$. Нулевой вектор сонаправлен любому вектору, поэтому из условий $\overline{AB} \parallel \overline{0}$ и $\overline{0} \parallel \overline{MN}$ не следует, что $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$. Данное бинарное отношение не является отношением эквивалентности.

Если на множестве введено отношение эквивалентности, то это множество естественным образом разбивается на непересекающиеся подмножества — классы эквивалентности. Их образуют все те элементы множества, которые эквивалентны между собой. Введем понятие равенства двух направленных отрезков.

Определение 2. *Два ненулевых направленных отрезка называются равными друг другу, если они сонаправлены и их длины одинаковы. Два нулевых направленных отрезка всегда равны между собой.*

Введенное отношение удовлетворяет следующим свойствам.

Свойство 1. *Отношение равенства направленных отрезков является отношением эквивалентности.*

Действительно, любой направленный отрезок равен самому себе. Если $\overline{AB} = \overline{CD}$, то $\overline{CD} = \overline{AB}$. Если $\overline{AB} = \overline{CD}$ и $\overline{CD} = \overline{EF}$, то длины этих трех отрезков одинаковы, а их направления совпадают, поэтому $\overline{AB} = \overline{EF}$. Таким образом, условия рефлексивности, симметричности и транзитивности для отношения равенства направленных отрезков выполнены.

Свойство 2. *Отрезок $\overline{AB}$ равен отрезку $\overline{CD}$ в том и только в том случае, когда середины отрезков AD и BC совпадают.*

Если равные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ не лежат на одной прямой (рис. 3, *а*), то из определения 2 следует, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, поэтому его диагонали в точке пересечения делятся пополам. Наоборот, если отрезки AD и BC в точке пересечения делятся пополам, то четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, отсюда вытекает равенство направленных отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

Свойство 2 справедливо также и для отрезков, лежащих на одной прямой (рис. 3, *б*). Проверьте это самостоятельно.

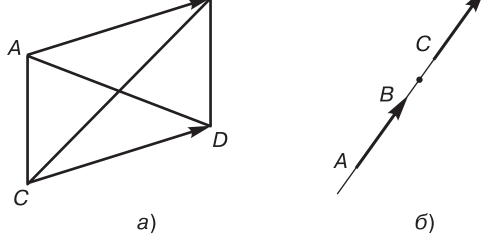

Рис. 3

Свойство 3. *Отрезок* $\overline{AB}$ *равен отрезку* $\overline{CD}$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{AC} = \overline{BD}$.

Доказательство этого свойства аналогично предыдущему.

Свойство 4. *Если даны направленный отрезок* $\overline{AB}$ *и точка* C, *то существует единственная точка* D, *для которой* $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Действительно, через точку C всегда можно провести прямую, параллельную AB, а затем выбрать на ней такую точку D, для которой отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны друг другу. В этом случае говорят, что направленный отрезок $\overline{AB}$ отложен от точки C.

Отношение равенства направленных отрезков, как следует из свойства 1, является отношением эквивалентности. Поэтому множество направленных отрезков разбивается на классы эквивалентности, т. е. классы равных между собой отрезков.

Определение 3. *Вектором называется класс равных между собой направленных отрезков.*

Если рассматривать класс равных между собой направленных отрезков, лежащих во всем пространстве, то они образуют вектор пространства; если же рассматривать класс равных между собой направленных отрезков плоскости, то они составляют вектор плоскости. Для обозначения векторов будем использовать строчные латинские буквы со стрелкой сверху: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Направленный отрезок, принадлежащий вектору, будем называть его *представителем*. Если дан направленный отрезок $\overline{AB}$, то вектор, которому принадлежит этот отрезок, будем обозначать через $\overrightarrow{AB}$. Таким образом, все множество направленных отрезков разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности — векторы. При этом от любой точки плоскости можно «отложить данный вектор», т. е. построить его представитель с началом в этой точке.

Легко видеть, что все нулевые направленные отрезки равны между собой. Действительно, у каждого из них длина равна 0 и они сонаправлены друг с другом. Вектор, представителем которого является нулевой направленный отрезок, называется *нулевым*. Он будет нами обозначаться через $\vec{0}$.

Как следует из определения 2, все равные между собой направленные отрезки имеют одну и ту же длину. Ее мы будем называть *длиной* или *модулем* вектора и обозначать через $|\vec{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$. Модуль нулевого вектора равен нулю. Если два вектора имеют одинаковый модуль, но противоположные направления, то их будем называть *противоположными*. Вектор, противоположный $\vec{a}$, будет обозначаться как $-\vec{a}$.

Векторы назовем соответственно коллинеарными, сонаправленными или противоположно направленными, если коллинеарны, сонаправлены или противоположно направлены любые два их представителя. Очевидно, что это определение не зависит от выбора представителей векторов. Обозначать коллинеарные, сонаправленные и противоположно направленные векторы будем соответственно через $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. *Систему векторов* a_1, a_2, ... a_n *будем называть коллинеарной, если любые два вектора системы коллинеарны друг другу.*

Будем говорить, что *вектор параллелен прямой*, если его представитель параллелен или лежит на этой прямой. Очевидно, что введенное понятие не зависит от выбора представителя вектора. Ясно, что система векторов коллинеарна в том и только в том случае, когда существует прямая линия, которой параллельны все векторы системы.

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Под линейными операциями над векторами понимаются сложение векторов и умножение вектора на число. Введем понятие суммы векторов.

Определение 1. *Пусть даны векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$. *От точки* A *отложим вектор* $\vec{a}$: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, *а от конца направленного отрезка* $\overline{AB}$ *отложим вектор* $\vec{b}$: $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. *Вектор* $\vec{c}$, *определенный направленным отрезком* $\overline{AC}$, *называется суммой векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Построение суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ показано на рис. 4. Из определения 1 следует, что для любых трех точек A, B и C выполнено равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, поэтому такой способ сложения векторов часто называют *правилом треугольника*. Наряду с ним используется еще один способ сложения векторов — *правило параллелограмма*. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два неколлинеарных вектора, то для построения суммы $\vec{a} + \vec{b}$ по правилу параллелограмма отложим их от одной точки: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Затем треугольник ABD достроим до параллелограмма $ABCD$. Искомая сумма равна вектору $\overrightarrow{AC}$ (рис. 5). Такое правило сложения векторов часто используется в физике, например для определения равнодействующей двух сил.

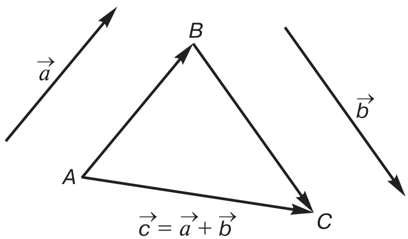

Рис. 4

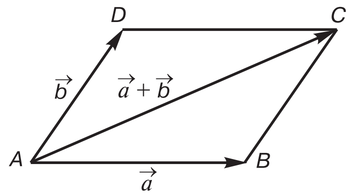

Рис. 5

Для обоснования корректности определения 1 следует проверить, что сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не зависит от выбора начальной точки A. Действительно, возьмем две точки A и A_1, отложим от них вектор $\vec{a}$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} = \vec{a}$, от точек B и B_1 отложим вектор $\vec{b}$: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1} = \vec{b}$ (рис. 6). Так как $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, то из свойства 3 отношения равенства (§ 1) $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$. Аналогично, из равенства $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$ вытекает $\overline{BB_1} = \overline{CC_1}$. Следовательно, $\overline{AA_1} = \overline{CC_1}$, откуда получим, что $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$.

Рассмотрим свойства операции сложения векторов.

Свойство 1. *Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (свойство коммутативности).*

Доказательство. Отложим от точки A вектор $\vec{a}$: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, а от точки B вектор $\vec{b}$: $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ (рис. 7). Теперь отложим от точки A вектор $\vec{b}$: $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Так как направленные отрезки $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$ равны друг другу, то $\overline{AB} = \overline{DC}$ (свойство 3, § 1). Отсюда следует, что $\overrightarrow{DC} = \vec{a}$, т. е. $\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. Свойство доказано.

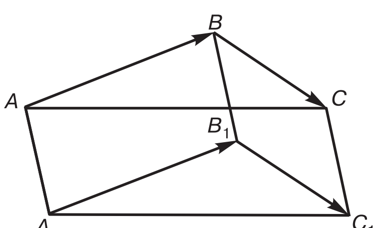

Рис. 6

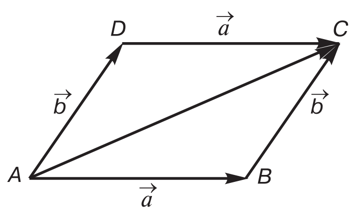

Рис. 7

[. . .]