ОБЩАЯ ФИЗИКА

И. Е. ИРОДОВ

МЕХАНИКА

основные законы

Лаборатория ЗНАНИЙ

И. Е. Иродов

МЕХАНИКА

основные законы

14-е издание

Рекомендовано
учебно-методическим объединением
в области «Ядерные физика и технологии»
в качестве учебного пособия
для студентов физических специальностей
высших учебных заведений

Москва
Лаборатория знаний

УДК 531
ББК 22.2
И83

Иродов И. Е.

И83 Механика. Основные законы / И. Е. Иродов. — 14-е изд. — М. : Лаборатория знаний, 2019. — 309 с. : ил.

ISBN 978-5-00101-181-1

В книге рассмотрены основные законы как нерелятивистской (ньютоновской), так и релятивистской механики — законы движения и законы сохранения импульса, энергии и момента импульса. На большом количестве примеров и задач показано, как следует применять эти законы при решении различных конкретных вопросов.

Для студентов физических специальностей вузов.

УДК 531
ББК 22.2

Учебное издание

Иродов Игорь Евгеньевич

МЕХАНИКА. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ

Ведущие редакторы *Б. И. Копылов, Т. Г. Хохлова*
Художник *Н. А. Лозинская*
Технический редактор *Е. В. Денюкова*
Компьютерная верстка: *В. А. Носенко*

Подписано в печать 05.06.18. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 19,5. Заказ

Издательство «Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

ISBN 978-5-00101-181-1

Содержание

Предисловие

Цель этой книги — сосредоточить внимание на основных законах механики (законах движения и законах сохранения импульса, энергии и момента импульса), а также показать, *как* следует применять эти законы при решении различных конкретных задач. При этом автор стремился помочь студентам, приступившим к изучению физики, начать вырабатывать в себе необходимую для будущего специалиста культуру физического мышления, а также определенную смелость в самостоятельном подходе к решению проблемных задач.

Книга содержит две части: ньютоновская механика (1–6 главы); релятивистская механика (7–8 главы). В первой части законы механики рассматриваются в ньютоновском приближении, т. е. при скоростях движения, значительно меньших скорости света, во второй — при скоростях, сравнимых со скоростью света.

В каждой главе сначала излагается теория соответствующего вопроса, а затем на ряде наиболее поучительных и интересных в физическом отношении примеров и задач показывается, *как* следует подходить к их решению. Задачи (их около 90) тесно связаны с основным текстом, часто являются его развитием и дополнением, поэтому работа над ними не менее важна, чем изучение основного текста.

Курсивом выделены важнейшие положения и термины. Петит используется для примеров и задач, а также для материала повышенной трудности (этот материал при первом чтении можно безболезненно опустить).

В настоящем издании сделаны некоторые изменения чисто технического характера, внесены небольшие дополнения и уточнения, а также исправлены замеченные опечатки.

Книга как учебное пособие рассчитана в основном на студентов первых курсов вузов с расширенной программой по курсу общей физики. Она может быть полезной и студентам старших курсов, а также преподавателям вузов.

И. Иродов

Система обозначений

Векторы обозначены жирным прямым шрифтом (например $\mathbf{r}$, $\mathbf{F}$); та же буква светлым шрифтом (r, F) означает модуль вектора.

Орты — единичные векторы:

$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты декартовых координат x, y, z;

$\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ — орты цилиндрических координат ρ, φ, z;

$\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\tau}$ — орты нормали и касательной к траектории.

Средние величины заключены в угловые скобки $\langle\ \rangle$, например $\langle \mathbf{v} \rangle$, $\langle N \rangle$.

Символы Δ, d, δ перед величинами означают:

Δ — приращение величины, т. е. разность между ее конечным и начальным значениями, например $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\Delta U = U_2 - U_1$;

$-\Delta$ — убыль величины, т. е. разность между ее начальным и конечным значениями, например $-\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $-\Delta U = U_1 - U_2$;

d — дифференциал, например $\mathrm{d}\mathbf{r}$, $\mathrm{d}U$;

δ — элементарное значение величины, например δA — элементарная работа;

$\propto$ — знак пропорциональности, например $E \propto a^2$;

~ — величина порядка ..., например $l \sim 10^{-4}$ м.

Производная по времени от произвольной функции обозначена $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ или точкой над функцией ($\dot{f}$).

Системы отсчета обозначены курсивными буквами K, K', *Ц*.

***Ц*-система** — это система отсчета, связанная с центром масс и движущаяся *поступательно* по отношению к инерциальным системам (ее же называют *системой центра инерции*). Все величины в *Ц*-системе отмечены сверху значком ~ (тильда), например $\tilde{\mathbf{p}}$, $\tilde{E}$.

Введение

Механика — это раздел физики, в котором изучается движение тел в пространстве и времени. Тот факт, что механические явления протекают в пространстве и времени, находит свое отражение в любом механическом законе, содержащем явно или неявно пространственно-временные соотношения — расстояния и промежутки времени.

Положение тела в пространстве может быть определено только по отношению к каким-либо другим телам. Это же относится и к движению тела, т. е. к изменению его положения с течением времени. Тело (или система неподвижных друг относительно друга тел), которое служит для определения положения интересующего нас тела, называют *телом отсчета*.

Практически для описания движения с телом отсчета связывают какую-нибудь систему координат, например декартову. Координаты тела позволяют установить его положение в пространстве. Так как движение происходит не только в пространстве, но и во времени, то для описания движения необходимо отсчитывать также и время. Это делается с помощью часов того или иного типа.

Совокупность тела отсчета и связанных с ним координат и синхронизированных между собой часов образует ***систему отсчета***. Понятие системы отсчета является фундаментальным в физике. Пространственно-временное описание движения при помощи расстояний и промежутков времени возможно только тогда, когда выбрана определенная система отсчета.

Пространство и время сами являются *физическими* объектами, как и любые другие, однако неизмеримо более важными и существенными. Чтобы изучить свойства пространства и времени, нужно наблюдать движение тел, которые в них находятся. Исследуя характер движения тел, мы тем самым познаем и свойства пространства и времени.

Опыт показывает, что, пока скорости тел малы по сравнению со скоростью света, линейные масштабы и промежутки времени остаются *неизменными* при переходе от одной системы отсчета к другой, т. е. не зависят от выбора системы отсчета. Это нашло свое выражение в ньютоновской концепции абсолютности пространства и времени. Механику, изучающую движения тел именно в этих случаях, называют *ньютоновской*.

При переходе же к скоростям, сравнимым со скоростью света, обнаруживается, что характер движения тел радикально меняется. При этом линейные масштабы и промежутки времени уже *зависят* от выбора системы отсчета и в разных системах отсчета будут разными. Механику, основанную на этих представлениях, называют *релятивистской*. Естественно, что релятивистская механика является более общей и в частном случае малых скоростей переходит в ньютоновскую.

Реальные движения тел настолько сложны, что, изучая их, необходимо отвлечься от несущественных для рассматриваемого движения деталей (в противном случае задача так усложнилась бы, что решить ее практически было бы невозможно). С этой целью используют понятия (абстракции, идеализации), применимость которых зависит от конкретного характера интересующей нас задачи, а также от той степени точности, с которой мы хотим получить результат. Среди этих понятий большую роль играют понятия материальной точки и абсолютно твердого тела.

Материальная точка — это тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Ясно, что одно и то же тело в одних случаях можно рассматривать как материальную точку, в других же — как протяженное тело.

Абсолютно твердое тело, или, короче, *твердое тело*, — это система материальных точек, расстояния между которыми не меняются в процессе движения. Реальное тело можно считать абсолютно твердым, если в условиях рассматриваемой задачи его деформации пренебрежимо малы.

Механика ставит перед собой две основные задачи:

1. Изучение различных движений и обобщение полученных результатов в виде законов движения — законов, с помощью которых может быть предсказан характер движения в каждом конкретном случае.

2. Отыскание общих механических свойств, т. е. общих теорем или принципов, присущих любой системе, независимо от конкретного рода взаимодействий между телами системы.

Решение первой задачи привело к установлению Ньютоном и Эйнштейном так называемых динамических законов, решение же второй задачи — к обнаружению законов сохранения таких фундаментальных величин, как энергия, импульс и момент импульса.

Динамические законы и законы сохранения энергии, импульса и момента импульса представляют собой основные законы механики. Изучение их и составляет содержание этой книги.

Глава 1

Основы кинематики

Кинематика — это раздел механики, где изучаются способы описания движений независимо от причин, обусловливающих эти движения. В этой главе рассмотрены три вопроса: кинематика точки, кинематика твердого тела, преобразование скорости и ускорения при переходе от одной системы отсчета к другой.

§ 1.1. Кинематика точки

Существует три способа описания движения точки: векторный, координатный и естественный. Рассмотрим их последовательно.

Векторный способ

В этом способе положение интересующей нас точки A задают радиусом-вектором $\mathbf{r}$, проведенным из некоторой неподвижной точки O выбранной системы отсчета в точку A. При движении точки A ее радиус-вектор меняется в общем случае как по модулю, так и по направлению, т. е. радиус-вектор $\mathbf{r}$ зависит от времени t. Геометрическое место концов радиуса-вектора $\mathbf{r}$ называют *траекторией* точки A.

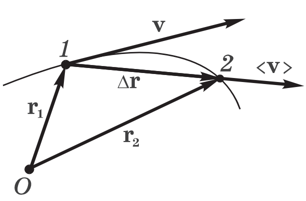

Рис. 1.1

Введем понятие *скорости* точки. Пусть за промежуток времени Δt точка A переместилась из точки *1* в точку *2* (рис. 1.1). Из рисунка видно, что *вектор перемещения* $\Delta\mathbf{r}$ точки A представляет собой приращение радиуса-вектора $\mathbf{r}$ за время Δt: $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Отношение $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ называют *средним вектором скорости* $\langle\mathbf{v}\rangle$ за время Δt. Вектор $\langle\mathbf{v}\rangle$ совпадает по направлению с $\Delta\mathbf{r}$.

Определим вектор скорости $\mathbf{v}$ точки в данный момент времени как предел отношения $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ при $\Delta t \to 0$, т. е.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \qquad (1.1)$$

Это значит, что вектор скорости **v** точки в данный момент времени равен производной от радиуса-вектора **r** по времени и направлен по касательной к траектории в данной точке в сторону движения точки A (как и вектор d**r**). Модуль вектора **v** равен*

$$v = |\mathbf{v}| = |\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t| \, .$$

Движение точки характеризуется также *ускорением*. Вектор ускорения **a** определяет скорость изменения вектора скорости точки со временем:

$$\mathbf{a} = \mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t, \tag{1.2}$$

т. е. равен производной от вектора скорости по времени. Направление вектора **a** совпадает с направлением вектора d**v** — приращением вектора **v** за время dt. Модуль вектора **a** определяется аналогично модулю вектора **v**.

Пример. Радиус-вектор точки зависит от времени t по закону

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}t + \mathbf{B}t^2/2 \, ,$$

где **A** и **B** — постоянные векторы. Найдем скорость **v** и ускорение **a** точки:

$$\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t = \mathbf{A} + \mathbf{B}t, \qquad \mathbf{a} = \mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t = \mathbf{B} = \mathrm{const}.$$

Модуль вектора скорости

$$v = \sqrt{\mathbf{v}^2} = \sqrt{\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB}t + \mathbf{B}^2 t^2} \, .$$

Таким образом, зная зависимость **r**(t), можно найти скорость **v** и ускорение **a** точки в каждый момент времени.

Возникает и обратная задача: можно ли найти **v**(t) и **r**(t), зная зависимость от времени ускорения **a**(t)?

Оказывается, для получения однозначного решения этой задачи одной зависимости **a**(t) недостаточно, необходимо еще знать *начальные условия*, а именно скорость $\mathbf{v}_0$ и радиус-вектор $\mathbf{r}_0$ точки в некоторый начальный момент $t = 0$. Чтобы в

---

* Заметим, что в общем случае $|\mathrm{d}\mathbf{r}| \neq \mathrm{d}r$, где r — модуль радиуса-вектора **r** и $v \neq \mathrm{d}r/\mathrm{d}t$. Например, если **r** меняется только по направлению (точка движется по окружности), то $r = \mathrm{const}$, $\mathrm{d}r = 0$, но $|\mathrm{d}\mathbf{r}| \neq 0$.

этом убедиться, рассмотрим простейший случай, когда в процессе движения ускорение точки $\mathbf{a}$ = const.

Сначала определим скорость точки $\mathbf{v}(t)$. Согласно (1.2), за промежуток времени dt элементарное приращение скорости $\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathbf{a}\mathrm{d}t$. Проинтегрировав это выражение по времени от $t = 0$ до t, найдем приращение вектора скорости за это время:

$$\Delta\mathbf{v} = \int_0^t \mathbf{a}\mathrm{d}t = \mathbf{a}t.$$

Но величина $\Delta\mathbf{v}$ — это еще не искомая скорость $\mathbf{v}$. Чтобы найти $\mathbf{v}$, необходимо знать скорость $\mathbf{v}_0$ в начальный момент времени. Тогда $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}$, или

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t.$$

Аналогично решается вопрос и о радиусе-векторе $\mathbf{r}\,(t)$ точки. Согласно (1.1), за промежуток времени dt элементарное приращение радиуса-вектора $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{v}\mathrm{d}t$. Интегрируя это выражение с учетом найденной зависимости $\mathbf{v}(t)$, определим приращение радиуса-вектора за время от $t = 0$ до t:

$$\Delta\mathbf{r} = \int_0^t \mathbf{v}(t)\mathrm{d}t = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{a}t^2/2\,.$$

Для нахождения самого радиуса-вектора $\mathbf{r}\,(t)$ необходимо знать еще положение точки $\mathbf{r}_0$ в начальный момент времени. Тогда $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}$, или

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{a}t^2/2\,.$$

Рассмотрим, например, движение камня, брошенного под некоторым углом к горизонту с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$. Если считать, что камень движется с постоянным ускорением $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, то его положение относительно точки бросания ($\mathbf{r}_0 = 0$) определяется радиусом-вектором

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{g}t^2/2\,,$$

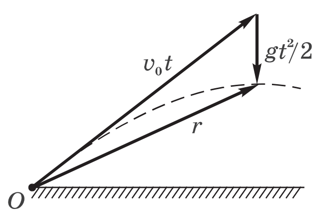

Рис. 1.2

т. е. в данном случае $\mathbf{r}$ представляет собой сумму двух векторов, что показано на рис. 1.2.

Итак, для полного решения задачи о движении точки — определения ее скорости **v** и положения **r** в зависимости от времени — недостаточно знать зависимость **a**(t), но еще необходимо знать и начальные условия, т. е. скорость $\mathbf{v}_0$ и положение $\mathbf{r}_0$ точки в начальный момент времени.

В заключение напомним, что в СИ единицами длины, скорости и ускорения являются соответственно *метр* (м), *метр на секунду* (м/с) и *метр на секунду в квадрате* (м/с^2).

Координатный способ

В этом способе с выбранным телом отсчета жестко связывают определенную систему координат (декартову, косоугольную или криволинейную). Выбор той или иной системы координат определяется рядом соображений: характером или симметрией задачи, постановкой вопроса, а также стремлением упростить само решение. Ограничимся здесь* декартовой системой координат x, y, z.

Запишем проекции на оси X, Y, Z радиуса-вектора **r** (t), характеризующего положение интересующей нас точки относительно начала координат O в момент t:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

Зная зависимость этих координат от времени — *закон движения* точки, можно найти положение точки в каждый момент времени, ее скорость и ускорение. Действительно, спроецировав (1.1) и (1.2), например, на ось X, получим формулы, определяющие проекции векторов скорости и ускорения на эту ось:

$$v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t, \tag{1.3}$$

где dx — проекция вектора перемещения d**r** на ось X;

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}, \tag{1.4}$$

где dv_x — проекция вектора приращения скорости d**v** на ось X. Аналогичные соотношения получаются для y- и z-проекций со-

* В приложении 1 рассмотрено движение точки в полярных координатах.

ответствующих векторов. Из этих формул видно, что проекции векторов скорости и ускорения равны соответственно первой и второй производным координат по времени.

Таким образом, зависимости $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, по существу, полностью определяют движение точки. Зная их, можно найти не только положение точки, но и проекции ее скорости и ускорения, а следовательно, модуль и направление векторов **v** и **a** в любой момент времени. Например, модуль вектора скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

направление же вектора **v** задается направляющими косинусами по формулам

$$\cos\alpha = v_x / v, \qquad \cos\beta = v_y / v, \qquad \cos\gamma = v_z / v,$$

где α, β, γ — углы меду вектором **v** и осями X, Y, Z соответственно. Аналогичными формулами определяются модуль и направление вектора ускорения.

Кроме того, можно решить и ряд других вопросов: найти траекторию точки, зависимость пройденного ею пути от времени, зависимость скорости от положения точки и пр.

Решение обратной задачи — нахождение скорости и закона движения точки по заданному ускорению — проводится, как и в векторном способе, путем интегрирования (в данном случае проекций ускорения по времени), причем задача и здесь имеет однозначное решение, если кроме ускорения заданы еще и начальные условия: проекции скорости и координаты точки в начальный момент.

«Естественный» способ

Этот способ применяют тогда, когда траектория точки известна заранее. Положение точки A определяют *дуговой координатой* l — расстоянием вдоль траектории от выбранного начала отсчета O (рис. 1.3). При этом произвольно устанавливают положительное направление отсчета координаты l (например, так, как показано стрелкой на рисунке).

Движение точки определено, если известны ее траектория, начало отсчета O, положительное направление отсчета дуговой координаты l и закон движения точки, т. е. зависимость $l(t)$.

Скорость точки. Введем единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$, связанный с движущейся точкой A и направленный по касательной к траектории в сторону возрастания дуговой координаты l (рис. 1.3).

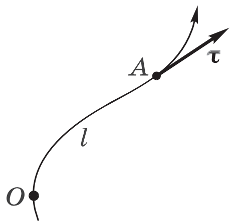

Рис. 1.3

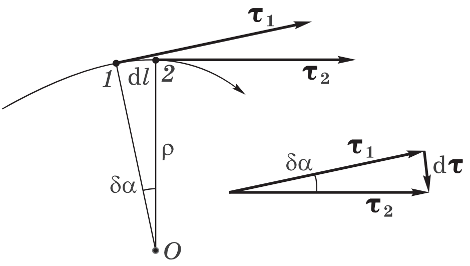

Рис. 1.4

Очевидно, что $\boldsymbol{\tau}$ — переменный вектор: он зависит от l. Вектор скорости $\mathbf{v}$ точки A направлен по касательной к траектории, поэтому его можно представить так:

$$\boxed{\mathbf{v} = v_\tau \boldsymbol{\tau},} \tag{1.5}$$

где $v_\tau = \mathrm{d}l/\mathrm{d}t$ — проекция вектора $\mathbf{v}$ на направление вектора $\boldsymbol{\tau}$, причем v_τ — величина алгебраическая. Кроме того,

$$|v_\tau| = |\mathbf{v}| = v.$$

Ускорение точки. Продифференцируем (1.5) по времени:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_\tau}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + v_\tau \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.6}$$

Затем преобразуем второе слагаемое этого выражения:

$$v_\tau \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t} = v_\tau \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = v_\tau^2 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}l} = v^2 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}l}. \tag{1.7}$$

Определим приращение вектора $\boldsymbol{\tau}$ на участке $\mathrm{d}l$ (рис. 1.4). Можно строго показать, что при стремлении точки *2* к точке *1* отрезок траектории между ними стремится к дуге окружности с центром в некоторой точке O. Эту точку называют *центром кривизны* траектории в данной точке, а радиус ρ соответствующей окружности — *радиусом кривизны* траектории в той же точке.

Как видно из рис. 1.4, угол $\delta\alpha = |\mathrm{d}l|/\rho = |\mathrm{d}\tau|/1$, откуда

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}/\mathrm{d}l| = 1/\rho,$$

причем при $\mathrm{d}l \to 0$ $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} \perp \boldsymbol{\tau}$. Введя единичный вектор $\mathbf{n}$ нормали к траектории в точке *1*, направленный к центру кривизны, запишем последнее равенство в векторном виде:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}/\mathrm{d}l = \mathbf{n}/\rho. \tag{1.8}$$

Подставим (1.8) в (1.7) и полученное выражение в (1.6). В результате найдем

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}v_\tau}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}.} \tag{1.9}$$

Здесь первое слагаемое называют *тангенциальным ускорением*, второе — *нормальным ускорением*. Таким образом, полное ускорение $\mathbf{a}$ точки может быть представлено как векторная сумма тангенциального и нормального ускорений.

Проекции вектора $\mathbf{a}$ на орты $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$, как видно из (1.9), равны

$$a_\tau = \mathrm{d}v_\tau/\mathrm{d}t, \quad a_n = v^2/\rho. \tag{1.10}$$

Модуль полного ускорения точки

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\dot{v}^2 + (v^2/\rho)^2},$$

где $\dot{v}$ — производная модуля скорости по времени.

Пример. Точка A движется по дуге радиусом ρ (рис. 1.5). Ее скорость зависит от дуговой координаты l по закону $v = k\sqrt{l}$, где k — постоянная. Найдем угол α между векторами полного ускорения и скорости точки как функцию координаты l.

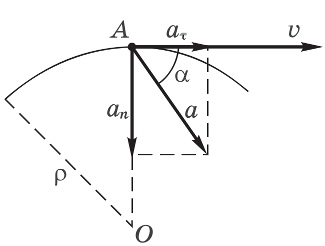

Рис. 1.5

Из рис. 1.5 видно, что угол α можно определить по формуле $\operatorname{tg}\alpha = a_n/a_\tau$. Найдем a_n и a_τ. Нормальное ускорение

$$a_n = v^2/\rho = k^2 l/\rho.$$

В нашем случае $v_\tau = v$, поэтому тангенциальное ускорение

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}l}v.$$

Учитывая зависимость v от l, получим

$$a_\tau = \frac{k}{2\sqrt{l}}k\sqrt{l} = \frac{k^2}{2}.$$

В результате $\operatorname{tg}\alpha = 2l/\rho$.

§ 1.2. Кинематика твердого тела

Теория движения твердого тела помимо самостоятельного значения играет важную роль еще и в другом отношении. С твердым телом, как известно, может быть связана система отсчета, служащая для пространственно-временного описания различных движений. Поэтому изучение характера движения твердых тел равносильно, по существу, изучению движений соответствующих систем отсчета. Результаты, которые мы получим в этом параграфе, будут неоднократно использоваться в дальнейшем.

Различают пять видов движения твердого тела: 1) поступательное, 2) вращение вокруг неподвижной оси, 3) плоское движение, 4) движение вокруг неподвижной точки и 5) свободное движение. Первые два движения (поступательное и вращение вокруг неподвижной оси) являются основными движениями твердого тела. Остальные виды движения твердого тела, оказывается, можно свести к одному из основных движений или к их совокупности (это будет показано на примере плоского движения).

В данном параграфе рассмотрены первые три вида движения и вопрос сложения угловых скоростей.

Поступательное движение

Это такое движение твердого тела, при котором любая прямая, связанная с телом, все время остается параллельной своему начальному положению, например вагон, движущийся по прямому участку пути; кабина колеса обозрения и др.

При поступательном движении все точки твердого тела совершают за один и тот же промежуток времени равные перемещения. Поэтому скорости и ускорения всех точек тела в данный момент времени одинаковы. Это обстоятельство позволяет свести изучение поступательного движения твердого тела к изучению движения отдельной точки тела, т. е. к задаче кинематики точки.

Таким образом, поступательное движение твердого тела может быть полностью описано, если известны зависимость от времени радиуса-вектора $\mathbf{r}(t)$ любой точки этого тела и положение последнего в начальный момент.

Вращение вокруг неподвижной оси

Пусть твердое тело, вращаясь вокруг неподвижной в данной системе отсчета оси OO', совершило за время $\mathrm{d}t$ бесконечно малый поворот. Соответствующий угол поворота будем характеризовать вектором $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$, модуль которого равен углу поворота, а направление совпадает с осью OO', причем так, что направление поворота отвечает *правилу правого винта* по отношению к направлению вектора $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$ (рис. 1.6).

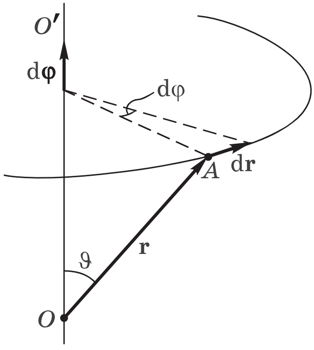

Рис. 1.6

Теперь найдем элементарное перемещение любой точки A твердого тела при таком повороте. Положение точки A зададим радиусом-вектором $\mathbf{r}$, проведенным из некоторой точки O на оси вращения. Тогда линейное перемещение конца радиуса-вектора $\mathbf{r}$ (рис. 1.6) связано с углом поворота $\mathrm{d}\varphi$ соотношением

$$|\mathrm{d}\mathbf{r}| = r \sin\vartheta \, \mathrm{d}\varphi ,$$

или в векторном виде

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = [\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{r}]. \qquad (1.11)$$

Отметим, что это равенство справедливо лишь для бесконечно малого поворота $d\boldsymbol{\varphi}$. Другими словами, только бесконечно малые повороты можно рассматривать как векторы*.

Кроме того, введенный нами вектор $d\boldsymbol{\varphi}$ удовлетворяет основному свойству векторов — векторному сложению. В самом деле, пусть твердое тело совершает два элементарных поворота $d\boldsymbol{\varphi}_1$ и $d\boldsymbol{\varphi}_2$ вокруг разных осей, проходящих через неподвижную точку O. Тогда результирующее перемещение $d\mathbf{r}$ произвольной точки A тела, радиус-вектор которой относительно точки O равен $\mathbf{r}$, можно представить так:

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2 = [d\boldsymbol{\varphi}_1, \mathbf{r}] + [d\boldsymbol{\varphi}_2, \mathbf{r}] = [d\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{r}],$$

где

$$d\boldsymbol{\varphi} = d\boldsymbol{\varphi}_1 + d\boldsymbol{\varphi}_2, \tag{1.12}$$

т. е. два данных поворота ($d\boldsymbol{\varphi}_1$ и $d\boldsymbol{\varphi}_2$) эквивалентны одному повороту на угол $d\boldsymbol{\varphi} = d\boldsymbol{\varphi}_1 + d\boldsymbol{\varphi}_2$ вокруг оси, совпадающей с вектором $d\boldsymbol{\varphi}$ и проходящей через точку O.

Заметим, что при рассмотрении таких величин, как радиус-вектор $\mathbf{r}$, скорость $\mathbf{v}$, ускорение $\mathbf{a}$, не возникал вопрос о выборе их направления: оно вытекало естественным образом из природы самих величин. Подобные векторы называют *полярными*. В отличие от них векторы типа $d\boldsymbol{\varphi}$, направление которых связывают с направлением вращения, называют *аксиальными*.

Введем векторы угловой скорости и углового ускорения. Вектор *угловой скорости* $\boldsymbol{\omega}$ определяют как

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\varphi}/dt,} \tag{1.13}$$

где dt — промежуток времени, за который тело совершает поворот $d\boldsymbol{\varphi}$. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ совпадает по направлению с вектором $d\boldsymbol{\varphi}$ и представляет собой аксиальный вектор.

---

* Как следует из рис. 1.6, для конечного поворота на угол $\Delta\varphi$ линейное перемещение точки A

$$|\Delta\mathbf{r}| = r \sin\vartheta \cdot 2\sin(\Delta\varphi/2).$$

Отсюда сразу видно, что перемещение $\Delta\mathbf{r}$ нельзя представить как векторное произведение векторов $\Delta\boldsymbol{\varphi}$ и $\mathbf{r}$. Это возможно лишь в случае бесконечно малого поворота $d\varphi$, в пределах которого радиус-вектор $\mathbf{r}$ можно считать неизменным.

Изменение вектора $\boldsymbol{\omega}$ со временем характеризуют вектором *углового ускорения* $\boldsymbol{\beta}$:

$$\boxed{\boldsymbol{\beta} = \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t.} \quad (1.14)$$

Направление вектора $\boldsymbol{\beta}$ совпадает с направлением $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$ — приращения вектора $\boldsymbol{\omega}$. Вектор $\boldsymbol{\beta}$, как и $\boldsymbol{\omega}$, является аксиальным.

Единицей угловой скорости в СИ является *радиан в секунду* (рад/с), а единицей углового ускорения — *радиан на секунду в квадрате* (рад/с^2).

Представление угловой скорости и углового ускорения в виде векторов оказывается чрезвычайно плодотворным, особенно при изучении более сложных движений твердого тела. Это дает возможность во многих случаях получить большую наглядность, а также резко упростить как анализ движения, так и соответствующие расчеты.

Запишем выражения для угловой скорости и углового ускорения и проекциях на ось вращения Z, положительное направление которой свяжем с положительным направлением отсчета координаты φ — угла поворота — правилом правого винта (рис. 1.7). Тогда проекции ω_z и β_z векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\beta}$ на ось Z определяются формулами

$$\omega_z = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t, \quad (1.15)$$

$$\beta_z = \mathrm{d}\omega_z/\mathrm{d}t. \quad (1.16)$$

Здесь ω_z и β_z — величины алгебраические. Их знак характеризует направление соответствующего вектора. Например, если $\omega_z > 0$, то направление вектора $\boldsymbol{\omega}$ совпадает с положительным направлением оси Z; если же $\omega_z < 0$, то направление вектора $\boldsymbol{\omega}$ противоположно. Аналогично и для углового ускорения.

Таким образом, зная зависимость $\varphi(t)$ — закон вращения тела, по формулам (1.15) и (1.16) можно найти угловую скорость и угловое ускорение в каждый момент времени. И наоборот, если известны зависимость углового ускорения от времени и начальные условия, т. е. угловая скорость ω_0 и угол φ_0 в начальный момент времени, то можно найти $\boldsymbol{\omega}(t)$ и $\varphi(t)$.

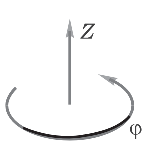

Рис. 1.7

Пример. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = at - bt^2/2$, где a и b — некоторые положительные постоянные. Найдем характер движения этого тела.

Согласно (1.15) и (1.16),

$$\omega_z = a - bt; \quad \beta_z = -b = \text{const}.$$

Отсюда видно, что тело, вращаясь равнозамедленно ($\beta_z < 0$), останавливается в момент $t_0 = a/b$, а затем направление вращения (знак ω_z) изменяется на противоположное.

Отметим, что решение всех задач на вращение твердого тела вокруг неподвижной оси аналогично по форме задачам на прямолинейное движение точки. Достаточно заменить линейные величины x, v_x и a_x на соответствующие угловые φ, ω_z и β_z, и мы получим все закономерности и соотношения для вращающегося тела.

Связь между линейными и угловыми величинами

Найдем скорость $\mathbf{v}$ произвольной точки A твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси OO' с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Пусть положение точки A относительно некоторой точки O оси вращения характеризуется радиусом-вектором $\mathbf{r}$ (рис. 1.8). Воспользуемся формулой (1.11), поделив ее на соответствующий промежуток времени $\mathrm{d}t$. Так как $\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t = \mathbf{v}$ и $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{\omega}$, то

$$\boxed{\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}],} \tag{1.17}$$

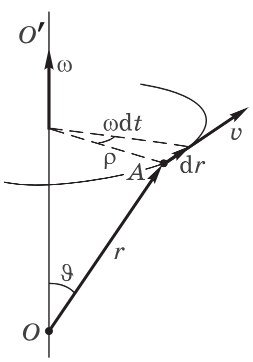

Рис. 1.8

т. е. скорость $\mathbf{v}$ любой точки A твердого тела, вращающегося вокруг некоторой оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, равна векторному произведению $\boldsymbol{\omega}$ на радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки A относительно произвольной точки O оси вращения (рис. 1.8).

Модуль вектора (1.17) $v = \omega r \sin\vartheta$, или

$$v = \omega\rho,$$

где ρ — радиус окружности, по которой движется точка A.

[. . .]