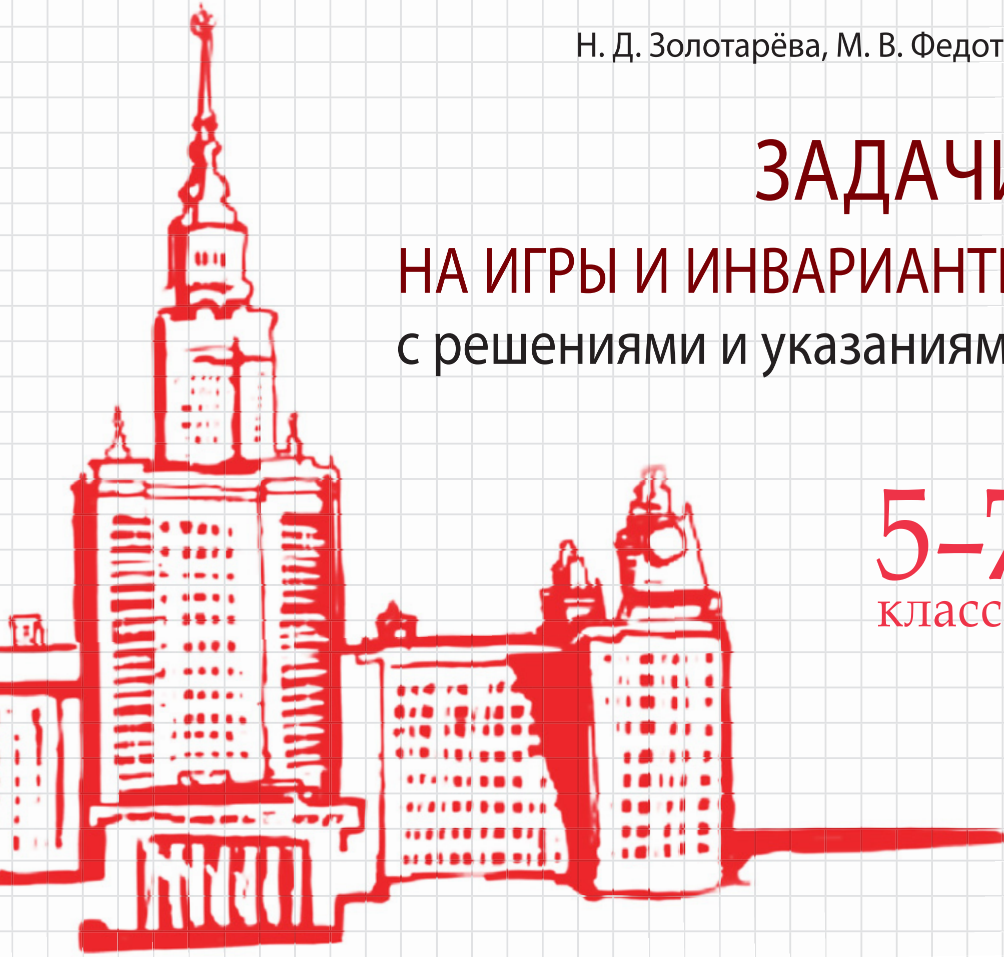
ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Н. Д. Золотарёва, М. В. Федотов

ЗАДАЧИ
НА ИГРЫ И ИНВАРИАНТЫ
с решениями и указаниями



5–7 классы

ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Лаборатория ЗНАНИЙ

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Н. Д. Золотарёва, М. В. Федотов

ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧИ НА ИГРЫ И ИНВАРИАНТЫ

с решениями и указаниями

5–7 классы

Под редакцией
М. В. Федотова

Москва
Лаборатория знаний

УДК 373.167.1:519
ББК 22.171я721.6
З-80

Золотарёва Н. Д.

З-80 Олимпиадная математика. Задачи на игры и инварианты с решениями и указаниями. 5–7 классы : учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, М. В. Федотов ; под редакцией М. В. Федотова. — М. : Лаборатория знаний, 2023. — 192 с. : ил. — (ВМК МГУ — школе).

ISBN 978-5-93208-372-7

Настоящее пособие составлено на основе олимпиадных задач по математике преподавателями факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. Пособие содержит теоретический материал, подборку задач, а также указания и решения к большинству задач.

Рекомендуется школьникам 5–7 классов, интересующимся олимпиадными задачами, учителям математики, руководителям кружков и факультативов.

УДК 373.167.1:519
ББК 22.171я721.6

Учебное издание

Серия: «ВМК МГУ — школе»

Золотарёва Наталья Дмитриевна
Федотов Михаил Валентинович

ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА.
ЗАДАЧИ НА ИГРЫ И ИНВАРИАНТЫ С РЕШЕНИЯМИ И УКАЗАНИЯМИ.
5–7 КЛАССЫ

Учебно-методическое пособие

Ведущий редактор *Ю. А. Серова*
Художник *В. А. Прокудин*
Технический редактор *Т. Ю. Федорова*
Оригинал-макет подготовлен *О. Г. Лапко* в пакете LaTeX 2ε

Подписано в печать 20.04.23. Формат 70×100/16.
Усл. печ. л. 15,60. Заказ

Издательство «Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

ISBN 978-5-93208-372-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ РЕДАКТОРА

Уважаемый читатель, вы держите в руках одну из книг серии «ВМК МГУ — школе». Учебно-методические пособия, входящие в эту серию, являются результатом более чем пятнадцатилетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова.

Сейчас изданы пособия по алгебре, геометрии, информатике и физике старшеклассникам для подготовки к ЕГЭ, олимпиадам и вступительным экзаменам в вузы. Недавно вышли пособия по математике для подготовки к ГИА для девятиклассников.

Но мы не хотим останавливаться только на стандартных задачах, необходимых для сдачи ГИА, ЕГЭ и экзаменов в вузы. Мы хотим, чтобы школьники с младших классов и до окончания школы могли решать задачи повышенной сложности — олимпиадные задачи, на которые у учителя, как правило, не остаётся времени на обычном уроке математики. Большинство книг по этой тематике выходит без разбивки по классам либо без разбивки по темам. Многие хорошие книги с олимпиадными задачами вышли давно и с тех пор не переиздавались. Мы собрали большое количество задач из различных старых и не очень старых сборников олимпиадных задач и предлагаем их вам.

Настоящее пособие рассчитано на 5–7 классы и является шестым в серии пособий по олимпиадным задачам. Будет ещё одна книга для 5–7 классов. Параллельно мы уже ведём работу над сборником задач для 8–9 классов. Завершат серию, конечно же, пособия для 10–11 классов.

Большинство олимпиадных задач, особенно для 5–7 классов, не намного сложнее обычных школьных задач по математике. Поэтому не бойтесь их. Они только все вместе выглядят страшными, а каждая задача по отдельности вполне вам по силам. Берите их и решайте. Дорогу осилит идущий.

Заместитель декана по учебной работе
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова,
доцент кафедры математической физики
М. В. Федотов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Каждый раздел пособия содержит теоретические основы, описание методов решения задач, примеры применения методов и набор заданий для решения. Задачи в разделах в основном расположены по принципу «*от простого — к сложному*». Аналогичная ситуация имеет место и с последовательностью изложения, поэтому сами разделы и задачи в них рекомендуется изучать в предложенном порядке. Приступать к решению задач надо после изучения соответствующего теоретического материала и разбора примеров.

После номера задачи в скобках приведены классы, которым эта задача была предложена на олимпиаде. Однако это разделение на классы довольно условно. Понятно, что если задачу давали в 5 классе, то её можно давать и в 6–7 классах, часто наоборот: задача, которую давали на олимпиаде для 6–7 классов, вполне по силам пятиклассникам. Поэтому, придерживаясь рекомендаций в скобках, относитесь к ним творчески. Кстати, распределение задач по темам тоже не всегда однозначно. Одну и ту же задачу можно было отнести к разным темам.

В принципе, по этому пособию можно заниматься три года: в 5 классе пройти по всем разделам, выбирая задачи для 5 класса, в 6 классе — снова пройти по всем разделам, выбирая задачи для 6 класса, и т. д. А можно пройти и за более короткий срок: за два года, если вы начали заниматься в 6 классе, или за один год, если вы уже в 7 классе.

Рекомендуется школьникам 5–7 классов, интересующимся олимпиадными задачами, учителям математики, руководителям кружков и факультативов.

Желаем удачи!

Часть I. **ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ**

1. Инварианты

В этом разделе приведены задачи, в которых некоторая величина (или свойство) не меняется при некотором преобразовании (или системе действий). Эта величина (свойство) называется *инвариантом*. Такие задачи, как и задачи на принцип Дирихле, относятся к логическим задачам.

Если в задаче инвариант может принимать только два значения, то от одного нельзя перейти к другому. Инвариантом может быть чётность, остаток от деления, некоторое алгебраическое выражение из величин, входящих в задачу, и т. д.

1.1. Чётность

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, в которых инвариантом является чётность какой-то величины. Часто эту величину надо создать, для этого используется сумма или произведение чисел, разбиение на пары, обнаружение чередования состояний и т. д.

Примеры решения задач

Пример 1. На столе стоят семь перевёрнутых стаканов. Разрешается одновременно переворачивать любые два стакана. Можно ли добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?

Решение. Заметим, что при перевёртывании любых двух стаканов не меняется чётность перевёрнутых стаканов. Действительно, возможны три варианта:

1) если перевернуть два стакана, стоящих вверх дном, то их количество уменьшится на два, т. е. чётность не изменится;
2) если перевернуть два стакана, стоящих правильно, то количество перевёрнутых стаканов увеличится на два, т. е. их чётность не изменится;

3) если перевернуть один стакан, стоящий правильно, а другой, стоящий вверх дном, то общее количество перевёрнутых стаканов не изменится, а следовательно, не изменится и их чётность.

Поскольку изначально было нечётное число (семь) перевёрнутых стаканов, то после каждой операции их будет оставаться нечётное число. Значит, нельзя добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно.

Ответ. Нет.

Замечание. В этой задаче инвариантом выступает нечётность перевёрнутых стаканов.

Пример 2. В ряд растут 8 яблонь. Число яблок на соседних деревьях отличается на 1. Может ли на всех яблонях вместе быть 225 яблок?

Решение. Заметим, что если два натуральных числа отличаются на единицу, то одно из них чётное, а другое нечётное. Поэтому сумма яблок на каждой паре соседних деревьев — нечётное число. Всего четыре пары яблонь. Чётная сумма нечётных чисел — чётное число. Поэтому на всех яблонях не может быть 225 яблок.

Ответ. Не может.

Замечание. В этой задаче в качестве инварианта выступает чётность суммы чётного числа нечётных слагаемых.

Пример 3. Максим по одной достаёт и складывает в две стопки чёрные и красные карточки. Класть карточку на другую карточку того же цвета запрещено. Десятая и одиннадцатая карточки были красные, а двадцать пятая — чёрная. Какого цвета была двадцать шестая карточка?

Решение. Так как десятая и одиннадцатая карточки были одного цвета, то они оказались в разных стопках. То есть сверху в обеих стопках лежат красные карточки.

Рассмотрим следующие 14 карточек (с двенадцатой по двадцать пятую). Пусть n из них положены в одну стопку, а остальные $14 - n$ — в другую. Так как числа n и $14 - n$ одной чётности, то после выкладывания этих карточек, т. е. после выкладывания 25-й карточки, верхние карты в стопках опять должны быть одного цвета.

Поэтому, если 25-я карточка была чёрной, то в обеих стопках сверху лежат чёрные карточки и следующая карточка должна быть красной.

Ответ. Красная.

Замечание. В этой задаче в качестве инварианта выступает одинаковая чётность чисел n и $14 - n$.

Задачи

1. $\boxed{5}$ а) Доказать, что сумма (разность) двух целых чисел одинаковой чётности чётна.

   б) Доказать, что сумма (разность) двух целых чисел разной чётности нечётна.

   в) Доказать, что сумма чётного числа нечётных слагаемых чётна.

   г) Доказать, что сумма нечётного числа нечётных слагаемых нечётна.

2. $\boxed{5\text{-}6}$ Можно ли доску 5×5 заполнить костяшками домино размером 1×2?

3. $\boxed{5\text{-}6}$ Кузнечик прыгал вдоль прямой и вернулся в исходную точку (длина прыжка постоянна и равна 1 м). Доказать, что он сделал чётное число прыжков.

4. $\boxed{5}$ Можно ли 25 рублей разменять десятью купюрами по 1, 3 и 5 рублей?

5. $\boxed{6}$ Кузнечик прыгает на 1 см, затем прыгает на 3 см в том же или в противоположном направлении, затем в том же или противоположном направлении на 5 см и т. д. Может ли он после 25-го прыжка оказаться в исходной точке?

6. $\boxed{5\text{-}6}$ Девять шестерёнок зацеплены по кругу: первая со второй, вторая с третьей и т. д., девятая с первой. Могут ли они вращаться? А если шестерёнок будет десять?

7. $\boxed{5\text{-}6}$ а) Даны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается к любым двум из них прибавлять по 1. Можно ли все числа сделать равными?

   б) Дядька Черномор написал на листке бумаги число 20. Тридцать три богатыря передают листок друг другу, и каждый или прибавляет к числу, или отнимает от него единицу. Может ли в результате получиться число 10?

8. [5-6] Произведение 22 целых чисел равно 1. Доказать, что их сумма не равна 0.

9. [5-6] а) На столе стоят шесть стаканов. Из них пять стаканов стоят правильно, а один перевёрнут донышком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые два стакана. Можно ли все стаканы поставить правильно?

   б) На столе стоят 16 стаканов. Из них 15 стаканов стоят правильно, а один перевёрнут донышком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые четыре стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?

10. [5-6] В языке Древнего Племени алфавит состоит всего из двух букв: «М» и «О». Два слова являются синонимами, если одно из другого можно получить при помощи исключения или добавления буквосочетаний «МО» и «ООММ», повторяемых в любом порядке и любом количестве. Являются ли синонимами в языке Древнего Племени слова «ОММ» и «МОО»?

11. [5-6] а) Доказать, что любая ось симметрии 1997-угольника (если она существует) обязательно проходит через какую-либо его вершину.

    б) Может ли прямая, не проходящая через вершины 11-звенной замкнутой ломаной, пересекать все её рёбра?

12. [6] а) Вдоль забора растут 6 кустов малины. Число ягод на соседних кустах отличается на 1. Может ли на всех кустах вместе быть 160 ягод? Не забудьте обосновать свой ответ.

    б) Петя купил общую тетрадь объёмом 96 листов и пронумеровал все её страницы по порядку числами от 1 до 192. Вася вырвал из этой тетради какие-то 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Доказать, что у него не могла получиться сумма 1990.

    в) Страницы книги пронумерованы подряд, от первой до последней. Хулиган Вася вырвал из разных мест книги 35 листов и сложил номера всех семидесяти вырванных страниц. У него получилось число 1994. Когда об этом узнал Коля, он заявил, что при подсчёте Вася ошибся. Объясните, почему Коля действительно прав.

13. [6-7] Сумма пяти чисел равна 200. Доказать, что их произведение не может оканчиваться на 1999.

14. [6] а) Два мудреца написали на семи карточках числа от 5 до 11. После этого они перемешали карточки; первый мудрец взял себе три карточки, второй взял две, а две

оставшиеся карточки они, не глядя, спрятали в мешок. Изучив свои карточки, первый мудрец сказал второму: «Я знаю, что сумма чисел на твоих карточках чётна!» Какие числа написаны на карточках первого мудреца? Единственный ли ответ в этой задаче?

б) Два мудреца написали на семи карточках числа от 2 до 8. После этого они перемешали карточки; первый мудрец взял себе три карточки, второй взял две, а две оставшиеся карточки они, не глядя, спрятали в мешок. Изучив свои карточки, первый мудрец сказал второму: «Я знаю, что сумма чисел на твоих карточках чётна!» Какие числа написаны на карточках первого мудреца? Единственный ли ответ в этой задаче?

15. $\boxed{6}$ На доске написано число 12. В течение каждой минуты число либо умножают, либо делят на 2 или на 3, и результат записывают на доску вместо исходного числа. Доказать, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не будет равно 54.

16. $\boxed{6}$ На доске написано несколько знаков «+» и «−». Разрешается стереть любые два знака и написать вместо них «+», если они одинаковы, и «−», если они разные. Доказать, что последний на доске знак не зависит от порядка, в котором производились стирания.

17. $\boxed{6}$ а) Можно ли составить из цифр $1, 2, \ldots, 9$ такое девятизначное число, что между 1 и 2 стоит нечётное число цифр, между 2 и 3 — также нечётное, ..., между цифрами 8 и 9 — нечётное число цифр?

б) Всегда ли можно расставить по росту 1997 человек, если разрешается переставлять любых двух людей, стоящих только через одного?

в) 100 фишек поставлены в ряд. Разрешается менять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли таким способом переставить фишки в обратном порядке.

18. $\boxed{6\text{-}7}$ Даны пять чисел. Сумма любых трёх из них чётна. Доказать, что все числа чётны.

19. $\boxed{6\text{-}7}$ В 6-м «Б» классе обучаются 20 учеников. В первой четверти они по трое дежурили по классу. Могло ли так получиться, что в некоторый момент каждый из учеников отдежурил с каждым ровно по одному разу?

20. $\boxed{6\text{-}7}$ Набор $(b_1, \ldots, b_7)$ является перестановкой набора целых чисел $(a_1, \ldots, a_7)$. Доказать, что число $(a_1 - b_1) \cdot \ldots \cdot (a_7 - b_7)$ чётное.

[. . .]

Часть II. УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

1. Инварианты

1.1. Чётность

Задача 1

$\boxed{5}$ а) Доказать, что сумма (разность) двух целых чисел одинаковой чётности чётна.

Идея. Представить чётное число в виде $2n$, а нечётное число — в виде $2n+1$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Рассмотрим два чётных числа $a = 2n$ и $b = 2k$. Их сумма чётна, поскольку

$$a + b = 2n + 2k = 2 \cdot (n + k).$$

Теперь рассмотрим два нечётных числа $c = 2n + 1$ и $d = 2k + 1$. Их сумма нечётна, поскольку

$$c + d = (2n + 1) + (2k + 1) = 2 \cdot (n + k + 1).$$

Для разности всё аналогично.

Задача 2

$\boxed{5\text{-}6}$ Можно ли доску 5×5 заполнить костяшками домино размером 1×2?

Идея. Исследовать на предмет чётности—нечётности возможное число клеток, заполненное костяшками 1×2.
Указание. Сумма двоек есть чётное число.

Решение. Каждая костяшка заполняет две клетки, следовательно, костяшки могут заполнить чётное число клеток; поэтому доску из 25 клеток заполнить костяшками нельзя.
Ответ. Нет.

Задача 3

[5-6] Кузнечик прыгал вдоль прямой и вернулся в исходную точку (длина прыжка постоянна и равна 1 м). Доказать, что он сделал чётное число прыжков.

Идея. Сравнить количество прыжков, сделанных вперёд, с количеством прыжков, сделанных назад.

Указание. Сумма двух равных чисел чётна.

Решение. Если кузнечик вернулся в исходную точку, то количество прыжков вперёд равно количеству прыжков назад. А так как сумма двух равных чисел чётна, то кузнечик сделал чётное число прыжков.

Задача 4

[5] Можно ли 25 рублей разменять десятью купюрами по 1, 3 и 5 рублей?

Идея. Исследовать на предмет чётности—нечётности сумму, полученную десятью купюрами по 1, 3 и 5 рублей.

Указание. Сумма чётного числа нечётных слагаемых чётна.

Решение. Сумма десяти нечётных слагаемых чётна, поэтому не может быть равна 25.

Ответ. Нет.

Задача 5

[6] Кузнечик прыгает на 1 см, затем прыгает на 3 см в том же или в противоположном направлении, затем в том же или противоположном направлении — на 5 см и т. д. Может ли он после 25-го прыжка оказаться в исходной точке?

Идея. Исследовать на предмет чётности—нечётности суммы длин прыжков, сделанных в одном направлении и в другом.

Указание. Сумма чётного числа нечётных слагаемых чётна. Сумма нечётного числа нечётных слагаемых нечётна.

Решение. Так как прыжков всего 25, то в одну сторону кузнечик сделает чётное число прыжков, а в другую — нечётное. Следовательно, в одну сторону он сместится на чётное число сантиметров (сумма чётного количества нечётных чисел — чётное число), а в другую — на нечётное число сантиметров (сумма нечётного количества нечётных чисел — нечётное число).

Чётное число не может равняться нечётному, значит, вернуться в ту же точку кузнечик не сможет.
Ответ. Нет.

Задача 6

[5-6] Девять шестерёнок зацеплены по кругу: первая со второй, вторая с третьей, и т. д., девятая с первой. Могут ли они вращаться? А если шестерёнок будет десять?

Идея. Рассмотреть направления вращения соседних шестерёнок.
Указание. Соседние шестерёнки вращаются в противоположные стороны.

Решение. Так как шестерёнки зацеплены по кругу, а соседние шестерёнки вращаются в противоположные стороны, то половина из них должна вращаться в одну сторону и половина — в другую. Поэтому шестерёнок должно быть чётное число. Следовательно, девять шестерёнок не могут вращаться, а десять могут.
Ответ. Нет; да.

Задача 7

[5-6] а) Даны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается к любым двум из них прибавлять по 1. Можно ли все числа сделать равными?

Идея. Исследовать сумму чисел на предмет чётности—нечётности.
Указание. При увеличении двух чисел на 1, чётность—нечётность суммы сохраняется.

Решение. Сумма изначальных чисел равна

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21,$$

т. е. нечётному числу. При увеличении двух чисел на 1 сумма всех шести чисел также останется нечётным числом. Это значит, что мы не сможем сделать все числа равными одному числу n, так как тогда сумма шести таких чисел была бы равна $6n$, что является чётным числом.
Ответ. Нет.

Задача 8

[5-6] Произведение 22 целых чисел равно 1. Доказать, что их сумма не равна 0.

Идея. Определить возможные значения данных 22 чисел.
Указание. Только чётное количество -1 может дать в произведении 1.

Решение. Если произведение нескольких целых чисел равно 1, то числа могут быть равны либо 1, либо -1.

Если их сумма равна 0, то среди них равное число 1 и -1, т. е. по 11 штук. Но тогда их произведение равно -1, а не 1. Следовательно, такого быть не может.

Задача 9

[5-6] а) На столе стоят шесть стаканов. Из них пять стаканов стоят правильно, а один перевёрнут донышком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые два стакана. Можно ли все стаканы поставить правильно?

Идея. Исследовать на предмет чётности—нечётности число перевёрнутых стаканов.
Указание. Показать, что при перевёртывании двух стаканов чётность числа перевёрнутых стаканов не меняется.

Решение. При перевёртывании двух стаканов не меняется чётность числа перевёрнутых стаканов, поскольку:

1) если перевернуть два стакана, стоящих вверх дном, то их количество уменьшится на два;

2) если перевернуть два стакана, стоящих правильно, то количество перевёрнутых стаканов увеличится на два;

3) если перевернуть один стакан, стоящий правильно, а другой, стоящий вверх дном, то общее количество перевёрнутых стаканов не изменится.

Так как изначально было нечётное число (один) перевёрнутых стаканов, то их после каждой операции будет оставаться нечётное число. Значит, нельзя добиться того, чтобы все шесть стаканов стояли правильно.
Ответ. Нет.

Задача 10

[5-6] В языке Древнего Племени алфавит состоит всего из двух букв: «М» и «О». Два слова являются синонимами, если одно из другого можно получить при помощи исключения или добавления

буквосочетаний «МО» и «ООММ», повторяемых в любом порядке и любом количестве. Являются ли синонимами в языке Древнего Племени слова «ОММ» и «МОО»?

Идея. Определить величину постоянную для всех слов, являющихся синонимами.
Указание. Сравнить количества букв «М» и «О» в синонимах.

Решение. В слове «ОММ» букв «М» больше, чем букв «О». После исключения или добавления буквосочетаний «МО» и «ООММ» букв «М» будет также больше, чем букв «О», а в слове «МОО» букв «М» меньше, чем букв «О», поэтому эти слова синонимами быть не могут.
Ответ. Нет.

Задача 11

5-6 а) Доказать, что любая ось симметрии 1997-угольника (если она существует) обязательно проходит через какую-либо его вершину.

Идея. Предположить противное и получить противоречие.

Указание. Подсчитать количество вершин, расположенных с каждой стороны относительно оси симметрии.

Решение. Если ни одна из вершин не лежит на оси симметрии, то для каждой из вершин существует симметричная вершина, т. е. число вершин должно быть чётным, а это не так. Следовательно, любая ось симметрии 1997-угольника (если она существует) обязательно проходит через какую-либо его вершину.

Задача 12

6 а) Вдоль забора растут 6 кустов малины. Число ягод на соседних кустах отличается на 1. Может ли на всех кустах вместе быть 160 ягод? Не забудьте обосновать свой ответ.

Идея. Проанализировать чётность—нечётность суммарного количества ягод на двух соседних кустах.

Указание. Разбить все кусты на пары.

Решение. Так как число ягод на соседних кустах отличается на 1, то на любых двух соседних кустах суммарное количество ягод будет нечётным.

Шесть кустов можно разбить на три пары, а сумма трёх нечётных чисел всегда нечётна. Следовательно, на всех кустах вместе не может быть чётного числа ягод.
Ответ. Не может.

6 б) Петя купил общую тетрадь объёмом 96 листов и пронумеровал все её страницы по порядку числами от 1 до 192. Вася вырвал из этой тетради какие-то 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Доказать, что у него не могла получиться сумма 1990.

Идея. Проанализировать чётность—нечётность суммы номеров страниц на одном листе.

Указание. Суммы номеров страниц на одном листе нечётна.

Решение. Так как номера на соседних страницах отличаются на 1, то сумма номеров страниц на одном листе нечётна.

Сумма 25 нечётных чисел нечётна. Следовательно, сумма не могла получиться равной 1990.

Задача 13

6-7 Сумма пяти чисел равна 200. Доказать, что их произведение не может оканчиваться на 1999.

Идея. Проанализировать чётность—нечётность данных пяти чисел.

Указание. Если хотя бы один из сомножителей является чётным числом, то произведение чётно.

Решение. Доказательство будем проводить от противного. Предположим, что произведение пяти чисел оканчивается на 1999. Так как число 1999 нечётно, то все пять чисел нечётны. Но сумма пяти нечётных чисел нечётна. Это противоречит тому, что она равна 200. Следовательно, произведение данных пяти чисел не может оканчиваться на 1999.

Задача 14

6 а) Два мудреца написали на семи карточках числа от 5 до 11. После этого они перемешали карточки, первый мудрец взял себе три карточки, второй взял две, а две оставшиеся карточки они, не глядя, спрятали в мешок. Изучив свои карточки, первый мудрец сказал второму: «Я знаю, что сумма чисел на твоих карточках чётна!» Какие числа написаны на карточках первого мудреца? Единственный ли ответ в этой задаче?

Идея. Проанализировать чётность—нечётность двух чисел, дающих в сумме чётное число.

Указание. На всех четырёх карточках, которые не попали к первому мудрецу, должны быть написаны числа одинаковой чётности.

Р е ш е н и е. Сумма двух чисел чётна, только если это два числа одинаковой чётности (оба чётны или оба нечётны).

Изучив свои карточки, первый мудрец сказал второму: «Я знаю, что сумма чисел на твоих карточках чётна!»

Это возможно, только если на всех четырёх карточках, которые не попали к первому мудрецу, написаны числа одинаковой чётности. Среди семи чисел от 5 до 11 три чётных числа и четыре нечётных. Значит, на карточках, не попавших к первому мудрецу, написаны четыре нечётных числа. Следовательно, на карточках первого мудреца написаны три чётных числа: 6, 8, 10.

О т в е т. 6, 8, 10; ответ единственный.

Задача 15

$\boxed{6}$ На доске написано число 12. В течение каждой минуты число либо умножают, либо делят либо на 2, либо на 3, а результат записывают на доску вместо исходного числа. Доказать, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не будет равно 54.

И д е я. Проанализировать чётность—нечётность количеств операций, связанных с 2 и связанных с 3.

У к а з а н и е. Разложить исходное и получившееся числа на множители и проследить за изменением количества множителей, равных 2 и 3.

Р е ш е н и е. Разложим на множители числа 12 и 54:

$$12 = 2^2 \cdot 3, \quad 54 = 2 \cdot 3^3.$$

Определим чётность—нечётность количеств операций, связанных с 2. Так как степень двойки уменьшилась на 1, то умножений было на одно меньше, чем делений. Если умножений было n, то делений $n+1$, следовательно, всего операций, связанных с числом 2, было

$$n + (n+1) = 2n + 1,$$

т. е. нечётное число.

Теперь определим чётность—нечётность количеств операций, связанных с 3. Так как степень двойки увеличилась на 2, то умножений было на два больше, чем делений. Если умножений было k, то делений было $k-2$, следовательно, всего операций связанных с числом 3, было

$$k + (k-2) = 2k - 2,$$

т. е. чётное число.

Получается, что общее количество всех операций нечётно и не может быть равным количеству минут в часе, т. е. 60.

[. . .]

Федотов Михаил Валентинович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики, заместитель декана по учебной работе факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. Область научных интересов: математическая физика, дифференциальные уравнения, численные методы, математические модели нелинейной оптики. Автор более 100 научных и учебно-методических работ.

Организовал и долгое время возглавлял Учебный центр факультета (1998–2014), в состав которого входят подготовительные курсы.

Золотарёва Наталья Дмитриевна — кандидат физико-математических наук, преподаватель факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. Преподаватель гимназии МГУ и подготовительных курсов МГУ, член экзаменационной комиссии МГУ. Область научных интересов: адаптивно измельчаемые сетки для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, оценка погрешности численных методов для решения ОДУ.

Является сертифицированным экспертом ГИА-11 по математике. Автор более 50 научных и учебно-методических работ.

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Серия книг **«ВМК МГУ–школе»** – результат многолетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова. В серию входят пособия по алгебре, геометрии, физике и информатике. Все они предназначены для подготовки и успешной сдачи ГИА и ЕГЭ, а также поступления в престижные вузы страны.

Олимпиадная математика – новое направление серии «ВМК МГУ–школе». Его основная задача – научить школьников всех возрастов решать задачи повышенной сложности.

Настоящее издание предназначено для учащихся 5–7 классов. В серии выпущено ещё несколько книг для 5–7 классов – по другим разделам математики, готовятся сборники задач для 8–9 и 10–11 классов.

Большинство олимпиадных задач, особенно для младшей и средней школы, не намного сложнее обычных школьных задач по математике. Поэтому не бойтесь их. Они только все вместе выглядят страшными, а каждая задача по отдельности вполне вам по силам. Берите их и решайте!