

ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

А. Е. Захарова, Ю. М. Высочанская

ЭЛЕМЕНТЫ  
ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ,  
КОМБИНАТОРИКИ  
И СТАТИСТИКИ  
В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО

**БИНОМ**

ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

А. Е. Захарова, Ю. М. Высочанская

ЭЛЕМЕНТЫ  
ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ,  
КОМБИНАТОРИКИ  
И СТАТИСТИКИ  
В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ



Москва  
БИНОМ. Лаборатория знаний  
2011

УДК 519.2  
ББК 22.17  
З-38

*Серия основана в 2007 г.*

**Захарова А. Е.**

**З-38** Элементы теории вероятностей, комбинаторики и статистики в основной школе : учебно-методическое пособие / А. Е. Захарова, Ю. М. Высочанская. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. — 135 с. : ил. — (Педагогическое образование).

ISBN 978-5-9963-0498-1

В учебно-методическом пособии можно найти ответы на следующие вопросы: почему элементы теории вероятностей, комбинаторики и статистики включены в современный школьный курс математики, когда зародились данные дисциплины, каковы возможные пути, средства, методы введения элементов стохастики в обучение и т. п.? Большой объем практических заданий поможет учащимся средней школы без труда освоить основы теории вероятностей, комбинаторики и статистики.

Материал, изложенный в пособии, может быть полезен и школьным учителям при подготовке к урокам, и вузовским преподавателям методики обучения математике в школе, и родителям учащихся.

УДК 519.2  
ББК 22.17

**По вопросам приобретения обращаться:  
«БИНОМ. Лаборатория знаний»  
Телефон: (499) 157-5272  
e-mail: binom@Lbz.ru, <http://www.Lbz.ru>**

ISBN 978-5-9963-0498-1

© БИНОМ. Лаборатория знаний,  
2011

# Оглавление

<b>Введение</b> .....	3
<b>Глава 1. Роль и место вероятностно-статистического материала в современном школьном курсе математики</b> .....	5
1.1. Из истории вопроса .....	7
1.2. Различные трактовки основных понятий вероятностно-статистической линии .....	11
<b>Глава 2. Методика формирования представлений, знаний, умений и навыков</b> .....	18
2.1. Пропедевтика теории вероятностей, комбинаторики и статистики на материале курса математики 5–6 классов .....	21
2.2. Методика введения основных понятий .....	53
2.2.1. Изучение вероятности .....	53
2.2.2. Изучение комбинаторики. ....	70
2.2.3. Изучение статистики .....	74
2.3. Методические приемы формирования основных понятий .....	98
<b>Литература</b> .....	132

# Введение

Во все времена люди ценили математику за ее точность. Как вычислить площадь помещения, сколько заплатить за покупку, какова производительность какого-либо оборудования — на все эти вопросы математика дает точный и однозначный ответ.

Но окружающий нас мир не так прост и однозначен, и результаты многих явлений заранее предсказать невозможно, какой бы полной информацией мы о них ни располагали. Нельзя, например, сказать наверняка, какой стороной упадет брошенная вверх монета, когда в следующем году выпадет снег, вызовут ли вас сегодня к доске на уроке математики? Такие непредсказуемые явления и события в нашей жизни называют *случайными*. И как бы ни старались мы все учесть, предусмотреть, спланировать и действовать строго в соответствии с намеченной программой, на практике жизнь каждодневно убеждает нас, что невозможно исключить случай.

Именно поэтому, для того чтобы активно жить и трудиться в мире, где случайности встречаются на каждом шагу, человечеству волей-неволей пришлось учитывать случай, что вызвало появление специальных разделов математики — *теории вероятностей, комбинаторики и математической статистики*.

В современной практической жизни мы постоянно сталкиваемся с необходимостью выбора, принятием решения, связанного с риском. Часто нам необходимо уметь оценить шансы на успех, степень достоверности получаемой нами информации в виде результатов социологических опросов, прогноза погоды, сведений о банковских кредитах и т. п. И каждый ученик ежедневно сталкивается с вероятностными ситуациями: успеет вовремя в школу или опоздает, справится ли он с контрольной работой, выиграет ли его любимый «Спартак» в предстоящей встрече? Представления о вероятности и достоверности события, о справедливых и несправедливых играх необходимы школьнику для принятия наилучшего варианта решения.

Без минимальной вероятностно-статистической грамотности сегодня трудно адекватно воспринимать социальную, экономическую и политическую информацию, принимать на ее основе обоснованные решения.

Изложенный в данном пособии материал предназначен для учащихся 5–9 классов, но он может оказаться полезным учителям математики и родителям.

# Глава 1

## Роль и место вероятностно-статистического материала в современном школьном курсе математики

Включение в школьные программы элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей (стохастики) представляет собой один из важнейших аспектов *модернизации содержания школьного математического образования*.

Именно поэтому в образовательный стандарт и школьные программы по математике основного общего образования элементы теории вероятностей, комбинаторики и статистики введены, наряду с алгеброй и геометрией, в качестве равноправной обязательной составляющей курса математики 5–9 классов. Эта линия заняла свое место наряду с такими привычными линиями, как «Выражения и преобразования», «Числа», «Функции», «Уравнения и неравенства», «Геометрические фигуры». Продолжение изучения материала этой линии предполагается и в старших классах.

Как же связаны между собой разделы теории вероятностей, комбинаторики и статистики?

Теория вероятностей относится к тем разделам математики, которые находят широкое применение на практике. Одной из областей применения теории вероятностей являются статистические исследования. Переход от элементарных событий к произвольным событиям, операциям над ними может рассматриваться как на основе теоретико-множественных понятий, так и без привлечения понятия «множество». В первом случае, изучив операции над множествами, их наглядные модели в виде диаграмм Эйлера, ученики переходят к рассмотрению события как множества, состоящего из благоприятствующих ему элементарных событий. Изучение операций над событиями полностью аналогично изучению операций над множествами.

Решение комбинаторных задач позволяет определить и наглядно представить набор *всех* возможных исходов некоторого испытания, опыта (или серии испытаний). Без использования аппарата комбинаторики во многих вероятностных задачах трудно описать все элементарные события. Поэтому важно дать ученикам наглядное, компактное, запоминающееся представление о тех практических ситуациях, где используются комбинаторные принципы подсчета. Это в свою очередь дает возможность вычисления вероятности определенного случайного события, связанного с рассматриваемыми исходами.

Кроме этого некоторые задачи комбинаторики помогают понять происхождение закона нормального распределения вероятностей — основы математической статистики.

Особенности стохастических умозаключений проявляются, прежде всего, в ходе интерпретаций результатов решения математической задачи, возникшей на базе статистической информации. По этой причине во многих случаях одну и ту же статистическую информацию разные люди могут трактовать по-разному.

Методы математической статистики позволяют понять смысл и ответить на многие вопросы, связанные с информацией, представленной в виде графиков, диаграмм, таблиц и др.

В требованиях к уровню подготовки выпускников основной школы говорится: «В результате изучения математики в основной школе ученик должен знать вероятностный характер многих закономерностей окружающего мира; примеры статистических закономерностей и выводов; *уметь*:

- извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках; составлять таблицы, строить диаграммы и графики;
- находить частоту события, используя собственные наблюдения и готовые статистические данные; находить вероятности случайных событий в простейших случаях;
- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для сравнения шансов наступления случайных событий, для оценки вероятности случайного события в практических ситуациях, сопоставления модели с реальной ситуацией».

Для внедрения указанного содержания в практику созданы реальные условия. Имеется учебно-методическое обеспечение,

позволяющее включать элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей в учебный процесс. Ряд учебников содержит соответствующий материал как органическую часть курса, к другим подготовлены специальные пособия. Помимо этого есть публикации, раскрывающие методику преподавания названного материала как по конкретным учебникам, так и в общем плане.

## 1.1. Из истории вопроса

Зарождение и развитие теории вероятностей связаны, в первую очередь, с азартными играми и относятся также к XVII в. Понятно, что основной вопрос состоял в определении ставки в игре, в поиске хода, который с наибольшей вероятностью приводил бы к выигрышу. Некоторые элементы теории вероятностей были известны задолго до этого, но только с указанного времени появились общие правила и законы, которые позволяли на основе математического анализа описывать и решать вероятностно-статистические задачи.

Основателями теории вероятностей по праву считают Б. Паскаля (1623–1662) и П. Ферма (1601–1665). Не у каждой науки есть точный «день рождения». У теории вероятностей такая условная дата есть — 28 октября 1654 г., именно тогда Блез Паскаль написал своему коллеге Пьеру Ферма о том, что «зародился новый раздел математики».

Ситуации, связанные с зарождением теории вероятностей, оказывают весьма заметное влияние и на современное изложение ее основ. Бросание игральных костей, подбрасывание кубика, выбор карт из колоды служат удобным, доступным и понятным средством для введения понятий и иллюстрации применения законов этой науки при решении различных задач.

Многие важные результаты в теории вероятностей были получены в XVIII и XIX вв. К основателям этого раздела математики следует также отнести Я. Бернулли, П. Лапласа, К. Гаусса, П. Л. Чебышева. Но только в XX в. теория вероятностей превратилась в строгую математическую теорию. Ведущая роль в этом принадлежит нашему соотечественнику, замечательному советскому математику Андрею Николаевичу Колмогорову.

Комбинаторика как раздел математики возникла в XVII в. С задачами, в которых приходилось выбирать те или иные

предметы, располагать их в определенном порядке и отыскивать среди всех расположений лучшие, люди столкнулись еще в древние времена. Решение таких задач было связано как с обеспечением существования племени, рода, с установлением иерархических отношений, торговлей, так и с культурой украшения жилища, одежды. Кроме того, комбинаторные задачи оказались полезными и в часы досуга. Об этом говорят многие древние рукописи, обнаруженные в Китае, Греции, Индии и др.

Значительный толчок в развитии комбинаторики дали азартные игры, получившие свое распространение после крестовых походов. Наиболее широкое распространение получила игра в кости, в ходе которой на ровную поверхность выбрасывались два или три кубика с нанесенными на их грани очками. Ставку забирал тот, кто выбрасывал наибольшее количество очков.

Было замечено, что некоторые суммы выпадают чаще, другие — реже. Стали составляться различные таблицы, отражающие количество способов, при которых выпадает та или иная сумма очков. Преодолевая неточности вычислений, уточняя условия подсчета, расширяя область исследования (например, переходя от случая бросания двух костей к бросанию трех костей), были получены многие важные для развития комбинаторики результаты.

Очевидно, что решение комбинаторных задач напрямую связано с вопросами определения вероятности случайного события.

Применением методов теории вероятностей при работе со статистической информацией занимается математическая статистика.

Термин «статистика» происходит от латинского слова «статус» (*status*) — состояние. Первоначально, в XVIII в., когда статистика начала оформляться в научную дисциплину, данный термин связывался с системой описания фактов, характеризующих состояние государства.

Статистика имеет древние корни и многовековую историю развития.

Она зародилась как результат обобщения уже достаточно развитой статистической практики, вызванной потребностями развития общества, например: подсчет населения, скота, учет земельных угодий, имущества и т. д.

Однако если сбор статистических данных начался в самой глубокой древности, то их обработка и анализ, т. е. зарождение статистики как науки, относятся к более позднему периоду.

Большое влияние на развитие математического направления в статистике России оказали работы русских математиков П. Л. Чебышева (1821–1894), А. А. Маркова (1856–1922), А. М. Ляпунова (1857–1918).

К началу XX в. Россия была одним из признанных центров научной статистической мысли.

В настоящее время статистика включает в себя большое и в то же время более определенное содержание:

- 1) сбор статистических сведений, т. е. сведений, характеризующих отдельные единицы каких-либо массовых совокупностей;
- 2) статистическое исследование полученных данных, заключающееся в выяснении тех закономерностей, которые могут быть установлены на основе данных массового наблюдения;
- 3) разработку приемов статистического наблюдения и анализа статистических данных. Это собственно и составляет ее содержание.

Теория вероятностей и математическая статистика в качестве научных теорий сформировались гораздо позже других разделов математики.

По мнению Б. В. Гнеденко, сейчас уже трудно установить, кто впервые поставил вопрос, пусть даже в недостаточно совершенной форме, о самой возможности количественной оценки уверенности в появлении случайного события.

Необходимость изучения в школе элементов теории вероятностей, комбинаторики и статистики пропагандировалась в России более 100 лет назад. Так, в 1899 г. на совещании по вопросам о средней школе попечитель Московского учебного округа профессор П. А. Некрасов так высказался по поводу предложений о сокращении программы за счет изъятия теории сочетаний и биннома Ньютона: «Теория сочетаний представляет средство для одной из важнейших способностей ума — способности представлять явления в разных комбинациях. Эта способность нужна в жизни всякому».

У отечественной школы есть опыт преподавания основ стохастики в период реформы 60–70 годов XX в. Однако он в основном негативный, так как материал оказался формальным, сложным для изучения и поэтому плохо усваивался. Это привело к его изъятию из школьной программы.

В настоящее время рассмотрение различных стратегий и тактик обучения элементам стохастики в средней школе имеет своих противников. Так, И. С. Ивашев-Мусатов следующим образом обосновывает свою точку зрения по этому вопросу: «...решение вероятностных задач с самого начала требует существенного привлечения интуиции и здравого смысла. Это абсолютно не присуще курсу математики в средней школе. Поэтому введение теории вероятностей в средней школе противопоказано» [5, с. 63].

Курс является новым для современной школы. Пропедевтика основных понятий на интуитивном, наглядном уровне предполагается в 5–6 классах, а в 7–9 классах — построение, изучение и применение базовых вероятностно-статистических моделей. Таким образом, определены два первых этапа работы над понятиями и методами стохастики. Эти рекомендации изложены в письме Министерства образования РФ от 23 декабря 2003 г.: «Изучение элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей целесообразно начать в 5–6 классах или в 7 классе — в зависимости от системы изложения в учебнике, по которому ведется преподавание. Необходимое время может быть найдено за счет отказа от рассмотрения с учащимися вопросов, которые не входят в обязательный минимум содержания основной школы (корень степени  $n$ , степень с дробным показателем, метод интервалов, тригонометрический материал в курсе алгебры), но сохраняется в ряде учебников и в практике работы учителей».

Результаты проведенных экспериментов позволяют утверждать, что основы описательной статистики, таблицы и столбчатые диаграммы, основы комбинаторики, систематический перебор возможных вариантов на небольшом множестве предметов возможно и даже необходимо вводить уже в курс начальной школы.

В настоящее время стохастическая линия в том или ином виде изложена авторскими коллективами практически всех учебников, указанных в комплекте Министерства образования и науки РФ. Они отличаются как логикой построения курса, так и характером его взаимосвязи с курсами алгебры и геометрии (представление вопросов теории вероятностей как отдельного курса и введение элементов теории вероятностей в действующие курсы алгебры и геометрии в качестве их органической части).

## 1.2. Различные трактовки основных понятий вероятностно-статистической линии

Остановимся на некоторых общих вопросах.

Рассмотрим различные определения вероятности.

1. *Классическое определение вероятности.* Если в некотором испытании существует  $n$  равновозможных исходов и  $m$  из них благоприятствуют событию  $A$ , то вероятность  $P(A)$  наступления события  $A$  называют отношением  $\frac{m}{n}$  и записывают

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

2. *Статистическое определение вероятности.* Относительной частотой события  $A$  в данной серии испытаний называют отношение числа испытаний  $M$ , в которых это событие произошло, к числу всех проведенных испытаний  $N$ . При этом число  $M$  называют частотой события  $A$ .

Под *статистической вероятностью* понимают число, около которого колеблется относительная частота события при большом числе испытаний.

3. *Геометрическая вероятность.* Пусть  $U$  — некоторая фигура на плоскости,  $S(U)$  — ее площадь,  $A$  — часть  $U$  с площадью  $S(A)$ . Каждая точка фигуры  $U$  — элементарное событие  $u$ . Будем считать равными вероятности попадания случайно выбранной точки  $u$  ( $u \in U$ ) в фигуры  $A \subseteq U$ ,  $B \subseteq U$  с равными площадями  $S(A) = S(B)$ .

Вероятность  $P(A)$  попадания точки  $u$  в фигуру  $A$  определяется как отношение площадей

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(U)}.$$

Аналогично строится определение геометрической вероятности, если в качестве величины, характеризующей фигуру (отрезок, дуга, трехмерное тело), рассматривается ее длина (длина отрезка, длина дуги) или объем тела.

4. *Аксиоматическое определение вероятности.* Рассматривается некоторое множество  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_3\}$ , элементы которого будем называть элементарными событиями.

Любое подмножество  $A = \{u_{t_1}, u_{t_2}, \dots, u_{t_m}\}$  множества  $U$  назовем событием. Все множество  $U$  — это достоверное событие, пустое множество  $\emptyset$  — невозможное событие. Сумма  $A + B$  и произведение  $AB$  событий определяются как сумма (объединение) и произведение (пересечение) множеств  $A$  и  $B$ . Если произведение  $AB$  пусто, то события  $A$  и  $B$  называются несовместными.

Событие  $\bar{A}$ , состоящее из всех элементов  $u_t$ , не входящих в  $A$ , называется противоположным событию  $A$ . События  $A$  и  $\bar{A}$  удовлетворяют условиям  $A\bar{A} = \emptyset$ ,  $A + \bar{A} = U$ .

Теперь определим вероятность  $P(A)$  события  $A$ .

Пусть каким-либо образом заданы числа  $p(u_t)$  ( $1 \leq t \leq n$ ), удовлетворяющие условиям  $p(u_t) \geq 0$ ,  $p(u_1) + p(u_2) + \dots + p(u_n) = 1$ . Эти числа называют элементарными вероятностями.

Вероятность  $P(A)$  события  $A = \{u_{t_1}, u_{t_2}, \dots, u_{t_m}\}$  определим равенством  $P(A) = p(u_{t_1}) + p(u_{t_2}) + \dots + p(u_{t_m})$ .

Так, определенная вероятность  $P(A)$  должна удовлетворять следующим аксиомам.

*Аксиома 1.* Для любого события  $A$

$$P(A) \geq 0.$$

*Аксиома 2.* Для достоверного события  $U$

$$P(U) = 1.$$

*Аксиома 3.* Для любых попарно несовместных событий  $A_1, A_2, \dots, A_m$

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_m) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_m).$$

Из этих аксиом следует, что  $P(\emptyset) = 0$  и  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

Проведем методический анализ различных подходов к определению вероятности случайного события.

На начальном этапе каждый школьник должен научиться определять множество исходов испытания. При введении вероятности для испытания с конечным числом исходов можно использовать как *классическое*, так и *статистическое* определения вероятности.

Однако, по мнению венгерского математика А. Реньи, классическое определение вероятности совсем не является опреде-

лением вероятности, а лишь описывает метод ее вычисления в простейших случаях.

Так, в школьной энциклопедии [14] дается следующее разъяснение: «Если опыт таков, что он подразделяется только на конечное число элементарных событий, которые к тому же являются равновероятными, то говорят, что речь идет о классическом случае. Для опытов этого типа теорию вероятностей разрабатывал еще Лаплас. Примерами таких опытов является бросание монеты (два равновероятных элементарных события) или бросание игральной кости (шесть равновероятных элементарных событий).

В классическом случае из аксиом для вероятности  $P(A)$  события  $A$  получаем:

$$P(A) = (\text{Число элементарных событий, благоприятных для } A) / (\text{Число всех возможных элементарных событий}).$$

Под элементарным событием, благоприятным для  $A$ , понимают событие, осуществление которого ведет к осуществлению  $A$ .

Классическое определение вероятности случайного события базируется на понятии равновероятности случайных событий, которое, в свою очередь, основывается на интуиции и здравом смысле. Конечно, каждый школьник без труда воспринимает как равновозможные события выпадение «орла» и выпадение «решки» при подбрасывании одной монеты. Но если подбрасываются две монеты, то выявление равновозможных исходов уже не такая простая задача.

Анализ материала, посвященного изложению элементов теории вероятностей, у различных авторов учебников и учебных пособий характеризуется тем, что сначала вводятся понятия классической и статистической вероятности. Каждый из нас должен понимать, что классическое и статистическое определения вероятности не являются эквивалентными: первое представляет собой частный случай второго, когда имеется симметрия исходов испытания.

Отметим положительные моменты введения классического определения вероятности до ее статистического определения.

1. Оно связано с опытом (испытанием), распадающимся на конечное число элементарных событий, которые к тому

[ . . . ]



**ЗАХАРОВА АЛЬБИНА ЕВГЕНЬЕВНА**, кандидат педагогических наук, профессор кафедры теории и методики обучения математике в школе Московского городского педагогического университета. Имеет большой опыт обучения школьников математике, щедро делится методическими находками с учителями, умело и с интересом работает со студентами и аспирантами.



**ВЫСОЧАНСКАЯ ЮЛИЯ МИХАЙЛОВНА**, учитель математики высшей квалификационной категории, работает в московском Центре образования № 1448 «Президентский лицей». Общий педагогический стаж – 15 лет. Соискатель второго года обучения (с 2009 г.) по кафедре математического анализа и методики его преподавания Института математики и информатики Московского городского педагогического университета.