$$\varphi_0^h(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, & x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ 0, & x_1 \leqslant x \leqslant x_N; \end{cases}$$

$$\varphi_N^h(x) = \begin{cases} 0, & x_0 \leqslant x \leqslant x_{N-1}, \\ \dfrac{x - x_{N-1}}{x_N - x_{N-1}}, & x_{N-1} \leqslant x \leqslant x_N; \end{cases}$$

$$\varphi_j^h(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j, \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, & x_j \leqslant x \leqslant x_{j+1}, \\ 0, & \text{остальные } x. \end{cases}$$

Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
БИНОМ

Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ

Учебное пособие

2-е издание,
переработанное и дополненное

*Рекомендовано
УМО по классическому университетскому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших
учебных заведений, обучающихся по специальностям
высшего профессионального образования
010101 «Математика» и 010901 «Механика»*

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2010

УДК 519.6
ББК 22.193
Б30

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра математического моделирования МЭИ (ТУ)
(зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. А. А. Амосов);
д-р физ.-мат. наук, проф. В. И. Лебедев
(РНЦ «Курчатовский институт»)

Бахвалов Н. С.

Б30 Численные методы в задачах и упражнениях : учебное пособие / Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. — 240 с. : ил.

ISBN 978-5-9963-0333-5

Материал учебного пособия полностью соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта по математике. В книге содержатся элементы теории, примеры решений задач и упражнения для самостоятельной работы. Отличительная особенность пособия состоит в том, что представленные задачи и упражнения (их около 700) разбиты по рекомендуемым темам семинарских занятий, а их подбор призван способствовать закреплению материала, излагаемого в теоретическом курсе. При этом типовые задачи снабжены решениями (числом около 200) и могут быть использованы студентами для самостоятельного изучения предмета, а приведенные ответы и указания помогут преподавателям в выборе содержательных и интересных задач в соответствии со спецификой вуза.

Для студентов университетов, педагогических вузов и вузов с углубленным изучением математики, а также для студентов технических вузов, аспирантов и преподавателей, инженеров и научных работников, использующих в своей практической деятельности численные методы.

УДК 519.6
ББК 22.193

По вопросам приобретения обращаться:
«БИНОМ. Лаборатория знаний»
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: binom@Lbz.ru, http://www.Lbz.ru

ISBN 978-5-9963-0333-5

Оглавление

Предисловие ко второму изданию

Первое издание этой книги вышло в свет в серии «Высшая математика» издательства «Высшая школа» под общей редакцией академика РАН В. А. Садовничего в 2000 г. За это время стало ясно, что она нашла своего читателя. Книга активно используется студентами, аспирантами, преподавателями не только Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, но и большого количества других вузов страны. В то же время обнаружился ряд опечаток и неточностей в изложении и появились свежие идеи по улучшению подачи материала. Поэтому авторы с благодарностью приняли любезное предложение издательства «БИНОМ. Лаборатория знаний» о переиздании учебного пособия.

Во втором издании исправлены замеченные недостатки и добавлена новая глава про интегральные уравнения. Кроме того, из методических соображений был уточнен (в основном расширен) набор задач и упражнений, а также порядок их следования внутри параграфов; добавлено значительное количество решений, указаний и ответов.

К сожалению, в 2005 г. скоропостижно ушел из жизни один из авторов книги — Николай Сергеевич Бахвалов, выдающийся ученый — математик и педагог, доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, дважды лауреат Государственной премии, действительный член РАН. Однако подготовка второго издания к печати была выполнена на основании его многочисленных замечаний и рекомендаций.

Авторы искренне верят, что новая версия пособия окажется столь же полезной, как и предыдущая, для студентов и аспирантов, изучающих и применяющих численные алгоритмы, преподавателей, проводящих учебные занятия, а также для инженеров и исследователей, использующих в своей деятельности методы вычислительной математики.

А. В. Лапин, Е. В. Чижонков

Предисловие к первому изданию

Математика как наука возникла в связи с необходимостью решения практических задач: измерений на местности, навигации и т. д. Вследствие этого математика всегда была численной математикой, ее целью являлось получение решения в виде числа.

Крупнейшие ученые прошлого сочетали в своих трудах как построение математического описания явления природы (математической модели), так и его исследование. Анализ усложненных моделей требовал создания новых, как правило, численных или асимптотических методов решения задач. Названия некоторых из таких методов — методы Ньютона, Эйлера, Гаусса, Чебышёва — свидетельствуют о том, что их разработкой занимались крупнейшие ученые своего времени.

Последние полвека характерны бурным развитием вычислительной техники и теории численных методов. В результате происходит быстрое изменение взглядов на весь комплекс вопросов, связанных с применением компьютеров, в частности, на требования к численным методам. Поэтому нельзя предложить пособия по численным методам, содержащего рецепты решения всех реально встречающихся проблем. При выборе способа решения конкретной задачи всякое пособие играет роль лишь общего руководства, отталкиваясь от которого исследователь анализирует возникающие проблемы.

Настоящее пособие написано на основе опыта преподавания курса «Численные методы» на механико-математическом факультете и факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова и полностью соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта по математике, рекомендованного Министерством образования и науки Российской Федерации. Каждый раздел начинается с изложения базовых определений и теоретических результатов; далее рассматриваются типовые задачи, как правило, снабженные подробными решениями, а также приводятся упражнения для самостоятельных занятий, снабженные указаниями и ответами.

В процессе написания использовалась литература, список которой приведен в конце книги. Поскольку многие задачи встречаются в различных изданиях, установить авторство оказалось практически невозможно, поэтому было решено не делать в тексте ссылки на литературу.

Пособие охватывает традиционный материал по разностным уравнениям, приближению функций, численному интегрированию и дифференцированию, интегральным уравнениям, задачам алгебры и решению нелинейных уравнений, приближенным методам решения дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и с частными производными, а также по влиянию вычислительной погрешности в различных алгоритмах. Оно является хорошим дополнением к классическому университетскому учебнику Бахвалова Н. С., Жидкова Н. П., Кобелькова Г. М. «Численные методы» и недавно вышедшему учебному пособию Бахвалова Н. С., Корнева А. А., Чижонкова Е. В. «Численные методы. Решения задач и упражнения», носящему справочный характер.

Авторы

Глава I
Погрешность решения задачи

Если a — точное значение некоторой величины, a^* — известное приближение к нему, то *абсолютной погрешностью* приближенного значения a^* обычно называют некоторую величину $\Delta(a^*)$, про которую известно, что

$$|a^* - a| \leqslant \Delta(a^*) .$$

Относительной погрешностью приближенного значения называют некоторую величину $\delta(a^*)$, про которую известно, что

$$\left| \frac{a^* - a}{a^*} \right| \leqslant \delta(a^*) .$$

Относительную погрешность часто выражают в процентах.

§ 1. Вычислительная погрешность

Наиболее распространенная форма представления действительных чисел в компьютерах — *числа с плавающей запятой.* Множество F чисел с плавающей запятой характеризуется четырьмя параметрами: основанием системы счисления p, разрядностью t и интервалом показателей $[L, U]$. Каждое число x, принадлежащее F, представимо в виде

$$x = \pm \left(\frac{d_1}{p} + \frac{d_2}{p^2} + \ldots + \frac{d_t}{p^t} \right) p^\alpha ,$$

где целые числа $p, \alpha, d_1, \ldots, d_t$ удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant d_i \leqslant p - 1 ; \quad i = 1, \ldots, t ; \qquad L \leqslant \alpha \leqslant U .$$

Часто d_i называют *разрядами*, t — *длиной мантиссы*, α — *порядком числа. Мантиссой* m (дробной частью) x называют число в скобках. Множество F называют *нормализованным*, если для каждого $x \neq 0$ справедливо $d_1 \neq 0$.

Удобно определить, что округление с точностью ε — это некоторое отображение fl действительных чисел $\mathbb{R}$ на множество F чисел с плавающей запятой, удовлетворяющее следующим аксиомам.

1) Для произвольного $y \in \mathbb{R}$, такого, что результат отображения $fl(y) \in F$, $fl(y) \neq 0$, имеет место равенство $fl(y) = y(1+\eta)$, $|\eta| \leqslant \varepsilon$.
2) Обозначим результат арифметической операции $*$ с числами $a, b \in F$ через $fl(a*b)$. Если $fl(a*b) \neq 0$, то $fl(a*b) = (a*b)(1+\eta)$, $|\eta| \leqslant \varepsilon$.

Приведенные соотношения позволяют изучать влияние ошибок округления в различных алгоритмах.

Если результат округления не принадлежит F, то его обычно называют *переполнением* и обозначают ∞.

Будем считать, что ε — точная верхняя грань для $|\eta|$. При традиционном способе округления чисел имеем $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\,p^{1-t}$, при округлении отбрасыванием разрядов $\varepsilon = p^{1-t}$. Величину ε часто называют *машинной точностью*.

1.1. Построить нормализованное множество F с параметрами $p = 2$, $t = 3$, $L = -1$, $U = 2$.

1.2. Каков результат операций при использовании множества F из **1.1**?

1) $x = fl\left(\dfrac{23}{32}\right)$, 2) $x = fl\left(\dfrac{1}{8}\right)$, 3) $x = fl\,(4)$,
4) $x = fl\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}\right)$, 5) $x = fl\left(\dfrac{3}{8} + \dfrac{5}{4}\right)$, 6) $x = fl\left(3 + \dfrac{7}{2}\right)$,
7) $x = fl\left(\dfrac{7}{16} - \dfrac{3}{8}\right)$, 8) $x = fl\left(\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{5}{16}\right)$.

1.3. Верно ли, что всегда $fl\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \in [a, b]$?

1.4. Пусть отыскивается наименьший корень уравнения

$$y^2 - 140y + 1 = 0\,.$$

Вычисления производятся в десятичной системе счисления, причем в мантиссе числа после округления удерживается четыре разряда. Какая из формул $y = 70 - \sqrt{4899}$ или $y = \dfrac{1}{70 + \sqrt{4899}}$ дает более точный результат?

1.5. Пусть приближенное значение производной для гладкой функции $f(x)$ определяется при $h \ll 1$ по формуле $f'(x) \approx$ $\approx (f(x+h) - f(x))/h$, а сами значения $f(x)$ вычисляются с абсолютной погрешностью Δ. Получить оценку полной погрешности этой формулы при условии $|f''(x)| \leqslant M_2$. Найти оптимальный шаг h_0, при котором минимизируется величина оценки полной погрешности.

1.6. Найти абсолютную погрешность вычисления суммы $S = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j$, где все x_j — числа одного знака.

1.7. Пусть вычисляется сумма $\sum\limits_{j=1}^{10^6} \frac{1}{j^2}$. Какой алгоритм $S_0 = 0$, $S_n = S_{n-1} + \frac{1}{n^2}$, $n = 1, \ldots, 10^6$, или $R_{10^6+1} = 0$, $R_{n-1} = R_n + \frac{1}{n^2}$, $n = 10^6, \ldots, 1$, $\tilde{S}_{10^6} = R_0$, следует использовать, чтобы вычислительная погрешность суммы была меньше?

1.8. Предложить способ вычисления суммы, состоящей из слагаемых одного знака, минимизирующий влияние вычислительной погрешности.

1.9. Предложить способ вычисления знакопеременной суммы, минимизирующий влияние вычислительной погрешности.

1.10. Пусть значение многочлена $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ вычисляется в точке $x = 1$ по *схеме Горнера*:

$$P_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(\ldots(a_{n-1} + a_n x)\ldots)) .$$

Какую погрешность можно ожидать в результате, если коэффициенты округлены с погрешностью η?

1.11. Оценить погрешность вычисления скалярного произведения двух векторов $S = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$, если их компоненты округлены с погрешностью η.

1.12. Для элементов последовательности $I_n = \int\limits_0^1 x^n e^{x-1}\, dx$, $n = 1, 2, \ldots$, справедливо точное рекуррентное соотношение $I_n = 1 - n\, I_{n-1}$, $I_1 = 1/e$. Можно ли его использовать для приближенного вычисления интегралов, считая, что ошибка округления допускается только при вычислении I_1?

1.13. Пусть вычисления ведутся по формуле

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + h^2 f_n\,,\ n = 1, 2, \ldots\,,$$

где y_0, y_1 заданы точно, $|f_n| \leqslant M$ и $h \ll 1$. Какую вычислительную погрешность можно ожидать при вычислении y_n для больших значений n? Улучшится ли ситуация, если вычисления вести по формулам $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{h} = f_n$, $\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = z_n$?

1.14. Найти приближенное значение интеграла $\int\limits_0^{2\pi} \sin^{100} x\, dx$ с относительной погрешностью не более 10 %.

§ 2. Погрешность функции

Пусть искомая величина y является функцией параметров x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$: $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Область G допустимого изменения параметров x_j известна, требуется получить приближение к y и оценить его погрешность. Если y^* — приближенное значение величины y, то *предельной абсолютной погрешностью* называют величину

$$A(y^*) = \sup_{(x_1, x_2, .., x_n) \in G} |y(x_1, x_2, \ldots, x_n) - y^*|\,;$$

при этом *предельной относительной погрешностью* называют величину $R(y^*) = A(y^*)/|y^*|$.

2.1. Доказать, что предельная абсолютная погрешность $A(y^*)$ минимальна при $y^* = (y_1 + y_2)/2$, где

$$y_1 = \inf_G y(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \quad y_2 = \sup_G y(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,.$$

2.2. Показать, что предельная абсолютная погрешность суммы или разности равна сумме их предельных абсолютных погрешностей.

2.3. Показать, что предельная относительная погрешность произведения или частного с точностью до членов второго порядка малости равна сумме предельных относительных погрешностей.

2.4. Пусть $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Положим

$$A_{\sup}(y^*) = \sum_{j=1}^{n} B_j \Delta(x_j^*)\,, \text{ где } B_j = \sup_G \left| \frac{\partial y(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j} \right|\,,$$

$$A_{\mathrm{lin}}(y^*) = \sum_{j=1}^{n} |b_j| \Delta(x_j^*)\,, \text{ где } b_j = \left.\frac{\partial y(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x} = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)}\,.$$

Доказать, что $A(y^*) \leqslant A_{\sup}(y^*)$ и, если величина $\rho = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \Delta^2(x_j^*)\right)^{1/2}$ мала, то справедливо равенство: $A_{\sup}(y^*) = A_{\text{lin}}(y^*) + o(\rho)$.

2.5. Пусть $y = x^{10}$, $x^* = 1$ и задана абсолютная погрешность
1) $\Delta(x^*) = 0{,}001$; 2) $\Delta(x^*) = 0{,}1$.

Вычислить величины $A_{\sup}(y^*)$, $A_{\text{lin}}(y^*)$, $A(y^*)$.

2.6. Получить линейную оценку погрешности функции, заданной неявно уравнением $F(y, x_1, \ldots, x_n) = 0$.

2.7. Пусть y^* — простой (не кратный!) корень уравнения $y^2 + by + c = 0$, вычисленный при заданных приближенных значениях коэффициентов b^*, c^*, и известны погрешности $\Delta(b^*)$, $\Delta(c^*)$. Доказать, что

$$A_{\text{lin}}(y^*) = \frac{|y^*|\Delta(b^*) + \Delta(c^*)}{|2y^* + b^*|}\,.$$

2.8. Показать, что если уравнение из **2.7** имеет кратный корень, то погрешность приближенного значения корня имеет порядок $O(\sqrt{\rho})$, где $\rho = \big(\Delta^2(b^*) + \Delta^2(c^*)\big)^{1/2} \ll 1$.

2.9. Имеется приближение y^* к простому корню уравнения $f(y) = 0$. Вывести приближенное равенство $y - y^* \approx -f(y^*)/f'(y^*)$.

2.10. С каким минимальным числом верных знаков надо взять $\lg 2$ для того, чтобы вычислить корни уравнения $y^2 - 2\,y + \lg 2 = 0$ с четырьмя верными знаками?

2.11. Пусть ограниченные по модулю величиной M коэффициенты уравнения $a\,y^2 + b\,y + c = 0$ заданы с одинаковой относительной погрешностью δ. Найти максимальную абсолютную (относительную) погрешность, с которой могут вычисляться корни уравнения.

[...]