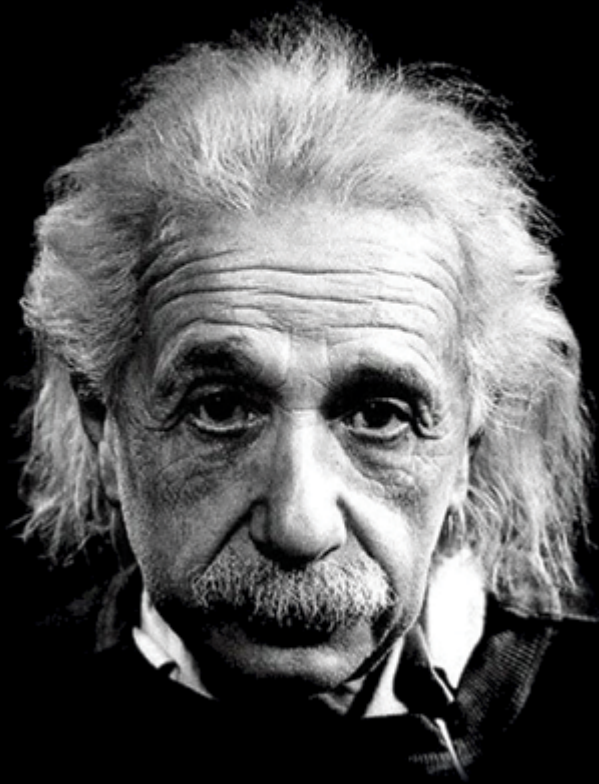


Уравнения:

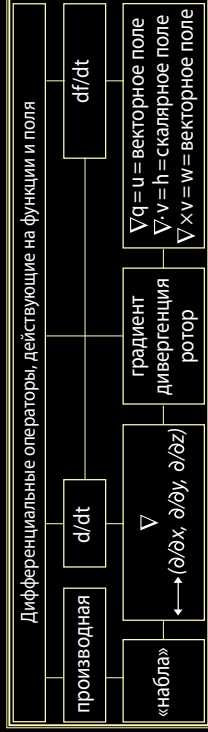
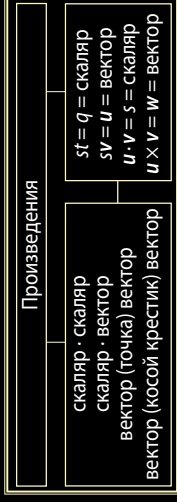
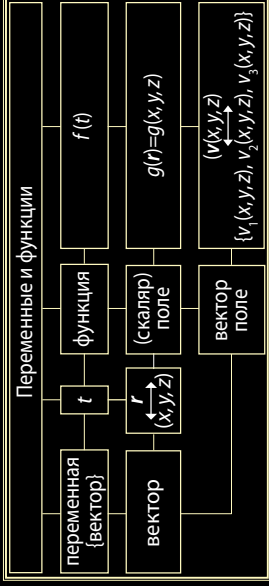
Сандер БЭЙС

СИМВОЛЫ ПОЗНАНИЯ



ИЗДАТЕЛЬСТВО

БИНОМ



УРАВНЕНИЯ:

СИМВОЛЫ ПОЗНАНИЯ

THE EQUATIONS

icons of knowledge

Sander Bais

Amsterdam University Press

Уравнения: СИМВОЛЫ ПОЗНАНИЯ

Сандер БЭЙС

Перевод с английского
канд. физ.-мат. наук А. В. Хачояна,
канд. физ.-мат. наук Л. И. Ястребова
под редакцией
канд. физ.-мат. наук Л. И. Ястребова



Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний

УДК 501+001
ББК 22+72.3
Б97

Бэйс С.

Б97 Уравнения: символы познания / С. Бэйс ; пер. с англ. —
М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. — 130 с. : ил.

ISBN 978-5-9963-0504-9

Попытка объяснить науку без уравнений походит на попытку объяснить искусство без иллюстраций. Книга посвящена 17 фундаментальным уравнениям физики, начиная с механики Ньютона и заканчивая квантовой механикой, общей и специальной теорией относительности и теорией струн. Многие вопросы современной науки рассматриваются под углом развития и взаимного влияния физики и математики. Материал иллюстрируется несложными схемами и графиками, подается в доходчивой форме.

Книга призвана популяризировать фундаментальные положения физики среди читателей, обладающих определенным уровнем подготовки в области физики и высшей математики, и позволяет выработать целостное представление об основных физических законах Вселенной. Будет также интересна специалистам в истории науки.

**УДК 501+001
ББК 22+72.3**

По вопросам приобретения обращаться:

«БИНОМ. Лаборатория знаний»

Телефон: (499) 157-5272

e-mail: binom@Lbz.ru, <http://www.Lbz.ru>

ISBN 978-5-9963-0504-9

© Sander Bais / Amsterdam
University Press, 2005
© БИНОМ. Лаборатория знаний,
2012

Содержание

| | |
|--|-----|
| Введение | 6 |
| Основные понятия. Повторение известного | 12 |
| Взлет и падение. Логистическое уравнение | 22 |
| Механика и гравитация. Уравнения динамики Ньютона и закон всемирного тяготения | 28 |
| Электромагнитные взаимодействия. Сила Лоренца | 36 |
| Локальные законы сохранения. Уравнение непрерывности..... | 40 |
| Электродинамика. Уравнения Максвелла | 44 |
| Электромагнитные волны. Волновые уравнения | 52 |
| Уединенные волны. Уравнение Кортевега–де Фриза | 56 |
| Термодинамика. Три закона термодинамики | 60 |
| Кинетическая теория. Уравнение Больцмана | 68 |
| Гидродинамика. Уравнения Навье–Стокса | 74 |
| Специальная теория относительности. Релятивистская кинематика | 78 |
| Общая теория относительности. Уравнения Эйнштейна | 86 |
| Квантовая механика. Уравнение Шрёдингера..... | 94 |
| Релятивистский электрон. Уравнение Дирака.... | 102 |
| Сильные взаимодействия. Квантовая хромодинамика | 108 |
| Электрослабые взаимодействия. Модель Глэшоу–Вайнберга–Салама | 114 |
| Теория струн. Взаимодействие суперструн | 120 |
| Назад в будущее. Последний взгляд | 126 |

Математика — язык природы

Книга посвящена основным (фундаментальным) физическим уравнениям, представляющим собой вдохновляющие проявления человеческого интеллекта в познании законов Вселенной. Эти уравнения — сжатое описание явлений природы, сформулированное на языке математики. Уравнения, которые мы будем обсуждать в книге, были получены не в ходе каких-либо отвлеченных умозаключений. Они возникли в результате ожесточенных споров о природе, противоречий между наблюдаемыми явлениями и интуицией и творческим мышлением великих умов.

Эта книга — не учебник физики или математики в строгом смысле. Автор хотел представить знаменитые физические уравнения в самой простой форме, не рассматривая тонкостей эмпирических данных, на основе которых были получены эти уравнения (разумеется, следует помнить, что их появление связано с длительным и тщательным изучением природных явлений). Автор постарался передать свое восхищение смыслом и красотой великих уравнений.

Физики используют математику как язык описания природы, и этот язык должен неизменно пополняться и расширяться по мере того, как ученые обнаруживают новые «слои» физической реальности, для которых еще нет названий. И в этом отличие физиков от математиков, которые разрабатывают математику исключительно в собственных интересах.

Распространенная догма

В научно-популярной литературе существует распространенная догма, которая накладывает вето на использование уравнений в любом популярном рассказе о науке. Некоторые люди ненавидят уравнения, тогда как другие их любят. Такой запрет на уравнения подобен требованиям объяснять искусство, не показывая картины. Автор отвергает это вето и исходит из противоположной позиции; в центре внимания будут сами уравнения. И, если мы говорим об уравнениях как о воплощенном знании, мы должны, конечно, показывать их во всей красоте.

Закон и порядок

Вселенная обладает высокой упорядоченностью на всех уровнях размеров объектов. В макромире (на высоком уровне) мы можем думать о системах планет, которые обращаются вокруг звезд, таких, как наше Солнце; о звездах, собирающихся в галактики, и о галактиках, формирующих кластеры и суперкластеры. В микромире мы можем говорить об атомах, ядрах и наиболее элементарных кирпичиках материи, таких как электроны, фотоны и кварки. Между этими двумя уровнями мы находим огромное разнообразие сложных структур в конденсированных формах вещества, таких как жидкости, кристаллы и самоорганизующиеся структуры, а также озадачивающе-сложные структуры молекул жизни, такие как ДНК и белки. Системы, которые мы хотим изучать, весьма разнообразны, вплоть до того, что они могут также включать динамику народонаселения, функционирование фондового рынка, процессы обучения, эпидемии или даже Вселенную в целом.

Выражаем соотношения, соотнося выражения

Английское слово *equation* (уравнение) возникло из латинского слова *aequare*, которое восходит к *aequus*, означающему «равенство» или «уровень». Уравнения могут не только определять численное значение некоторой переменной, но в более широком смысле они выражают связь между физическими переменными, которые характеризуют рассматриваемую физическую систему, и определяют их возможные изменения в пространстве и времени. Соотношения математически формулируются символами, такими как знак равенства «=», знак больше, чем «>» и меньше, чем «<». Соответственно, говорят о равенствах или неравенствах, в зависимости от имеющихся символов.

В науке существует множество уравнений, которые имеют разную степень значимости. Мы сосредоточимся только на фундаментальных уравнениях, которые отвечают критическим поворотным точкам в нашем познании. Они — важнейшие узлы сложной сети идей, погруженной в пространство наблюдаемых фактов.

Простые уравнения и сложные решения

Для изучения систем или структур мы в общем случае вводим переменные, такие как положение в пространстве, плотность популяции, температура и т. д. Затем мы пытаемся установить соотношения между этими структурными переменными. Получающиеся уравнения могут оказаться очень сложными. Переменные неизвестны, и мы хотим решить уравнения относительно них.

На всех своих уровнях природа организована так, что демонстрирует удивительную устойчивость структур, их разнообразие и сложное устройство.

Сложные структуры могут очень хорошо описываться простыми уравнениями. Поэтому чудо — не сложность нашего мира, а простота уравнений, описывающих эту сложность.

Наши поиски двойственны: с одной стороны нужно записать уравнения, которые управляют структурой и динамическим поведением системы; с другой стороны, необходимо понять принципы этого поведения и получить решения этих уравнений.

Построение уравнений требует понимания системы, которую нужно смоделировать; это — очень сложная задача, которую формулируют собственно физики. А для решения этих уравнений (т. е. для получения решений) нужны уже математики, которые оказываются необходимыми и незаменимыми партнерами.

Решения описывают не только стационарные состояния такие как молекула или кристалл, но и такие динамические процессы, как рассеяние частиц или эволюция во времени какой-то системы, которой мы интересуемся, например, погода, течение реки, рост конкурирующих колоний (популяций) бактерий или расширение Вселенной. Уравнения часто имеют предсказательную мощь: новые решения указывают пути новых экспериментальных открытий.

Переменные и константы

Уравнения обычно содержат не только неизвестные величины (переменные), но и константы, своеобразные контрольные параметры. Изменение этих параметров может существенно повлиять на свойства получаемых решений. Так, вода может замерзнуть или испаряться в зависимости от температуры, как от параметра. Орбита может изменяться от связывающей до несвязывающей в зависимости от силы притяжения¹.

В фундаментальных уравнениях, о которых мы сейчас говорим, появляются универсальные постоянные, часто называемые «фундаментальными константами природы», такие как гравитационная постоянная Ньютона, определяющая степень гравитационной силы, скорость света или, скажем, постоянная Планка. Численные значения наиболее важных фундаментальных констант приведены в таблице на форзаце. Они являются ключевыми параметрами, которые определяют масштаб объектов в нашей Вселенной. Если бы мы использовали те же самые уравнения, но изменили значения этих констант, то окружающий нас мир выглядел бы совершенно иначе. Вселенная могла бы оказаться непригодной для жизни и, вероятно, мы не могли бы обсуждать эти вопросы. Сегодня мы просто не понимаем, почему значения этих констант таковы, какие они есть.

С высоты птичьего полета

Эту книгу можно сравнить с ландшафтом, в котором уравнения играют роль гор. Некоторые горы трудны для восхождения, но вид, открывающийся с высоты, может быть восхитительным. Мы достигнем этого более простым способом. Будем летать над пейзажем, видеть сияние самых высоких горных вершин, не замечая того, насколько трудно передвигаться по земле.

¹ Имеется в виду, например, состояние электрона, которое может способствовать связыванию атомов в молекулу или не способствовать этому связыванию. — *Прим. ред.*

Как читать эту книгу

Автор советует начинать чтение с вводной части, содержащей основные сведения о математических понятиях и их обозначениях. Этот раздел представляет собой словарь терминов, используемых в книге, так что читатель может возвращаться к нему время от времени.

Главы книги не пронумерованы, чтобы подчеркнуть их независимость, т. е. не обязательно ее изучать «от корки до корки»; разделы можно читать в любом порядке. Это подобно тому, как в художественной галерее можно переходить из зала в зал.

Наконец, наши уравнения «знают друг о друге». Иногда они выступают вместе, а иногда — вступают в скрытые или явные противоречия. Порой между двумя уравнениями возникают открытые «столкновения», и тогда на арене может появиться третье уравнение. То, что выглядит как противостояние, зачастую приводит к созданию новых, объединяющих концепций, в результате чего кризис идей приводит к творческому прорыву. Уравнения рассказывают нам историю смены парадигм в науке.

Мы не будем замечать ущелья, ледники, трещины и крутые склоны. Насколько это возможно, мы минуем 99% тяжелого труда, используя 1% вдохновения (перефразируя А. Эйнштейна, который так говорил о науке). Мы не будем идти скалистыми путями, которые с высоты птичьего полета выглядят сетью тонких нитей, брошенных на пейзаж.

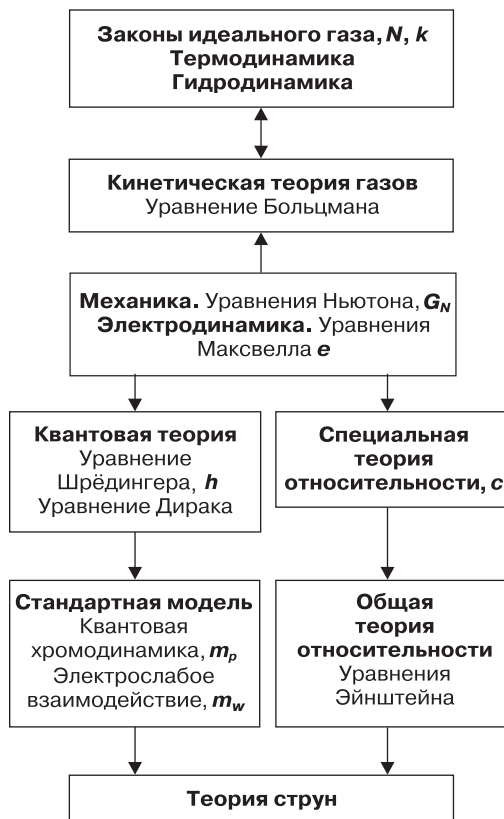
Конечно, при таком взгляде мы не можем полностью понимать все проблемы. Для некоторых читателей это может стать лишь первым путешествием по неизвестной территории, замечательной поэзией на незнакомом языке. Полное понимание при этом не очень важно, ведь путешественник все равно обогатится новыми знаниями и впечатлениями. Поэтому мы даем карту маршрута, прежде чем пускаться в путь.

Схема содержания

На схеме содержания показаны разделы книги и некоторые наиболее важные связи между ними. Направления стрелок на рисунке в основном соответствуют хронологии развития физики. Книга начинается с разделов, помещенных чуть выше центра рисунка, и продолжается «вверх», переходя к описанию макроскопического мира, состоящего из огромного количества атомов. Затем читатель перейдет к разделам в нижней части, вплоть до теории относительности и квантовых струн.

Строго говоря, мы можем представить, что все стрелки на рисунке направлены снизу вверх, чтобы подчеркнуть внутренне присущую нашей Вселенной иерархию структур. Более того, именно в этом направлении происходили эволюционные изменения Вселенной в течение 13,7 миллиардов лет с момента так называемого Большого взрыва. Эта эволюция крайне масштабна, ее протекание весьма похоже на основные идеи теории эволюции Дарвина; она демонстрирует необъяснимый успех редукционизма¹.

То, что Природа позволяет осознать ее основные принципы, может означать, что мы преодолеваем важный порог эволюционного развития.



¹ Редукционизм (от лат. *reductio*) — методологический принцип, согласно которому сложные идеи и системы могут быть полностью описаны в терминах наиболее простых их частей или компонентов (например, социальные явления описываются биологическими законами; проводимость металла объясняется так, как будто электроны представляют собой газ почти свободных частиц). — Прим. ред.

Математическая иерархия

В структуре уравнений существует некоторая иерархия. Их математическая сложность зависит от типа описываемых явлений. Многие из нас в школе затратили немало усилий, сталкиваясь с теми или иными уравнениями.

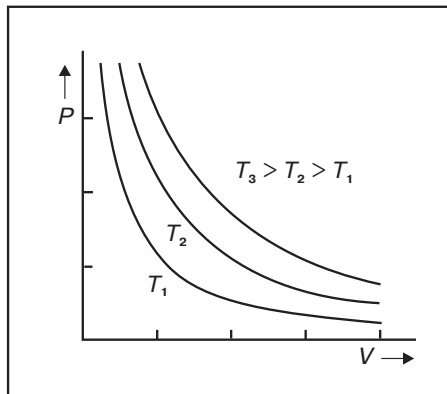
Простейшими уравнениями являются алгебраические уравнения, включающие в себя только алгебраические операции, типа сложения, умножения и т. д.

Простым алгебраическим уравнением, которое играет важную роль в физике, является уравнение состояния идеального газа $PV = RT$. Оно выражает феноменологическое соотношение между давлением газа P , его объемом V и температурой T . В уравнение также входит фундаментальная газовая константа R , которая является известным числом.

Это уравнение можно использовать по-разному. Из него следует, что три переменные (P , V и T), характеризующие состояние определенного количества газа, не являются независимыми, поскольку они удовлетворяют данному соотношению. Первый способ применения этого уравнения очевиден, поскольку, зная значения двух любых переменных, мы можем вычислить значение третьей. Однако уравнение дает еще и ценную качественную информацию о поведении газовых систем, как показано на рисунке. Из него следует, например, что при повышении давления при постоянном объеме температура будет также расти. Подобным же образом можно заключить, что при уменьшении объема (для постоянной температуры) давление будет меняться по одной из кривых, показанных на рисунке справа (т. е. расти).

Основные понятия

Повторение известного



$$PV = RT$$

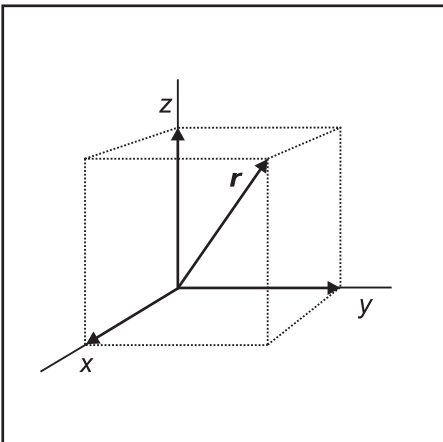
Газовая постоянная R определяется соотношением $R = Nk$, где N — число Авогадро, характеризующее число рассматриваемых молекул, а k — введенная Больцманом фундаментальная постоянная, соотносящая энергию с температурой.

(Число Авогадро, $N = 6,022 \cdot 10^{23}$, число молекул (атомов) в моле любого вещества. — Прим. ред.)

Это уравнение можно переписать в различных, но эквивалентных формах, используя рецепт: «Что Вы делаете с левой частью равенства, то же Вы должны сделать и с правой частью». Так, вычитая RT из обеих частей, мы можем написать $PV - RT = 0$, или деля обе стороны на T , получаем $PV/T = R$. В зависимости от вопроса, на который мы хотим получить ответ, может использоваться та или иная форма записи этого уравнения. При этом меняется только вид уравнения, а заложенный в него смысл остается неизменным. Большая часть рассматриваемых в книге уравнений не относится к простым алгебраическим соотношениям, а содержит более сложные понятия, например, производные от функций. Поэтому, прежде чем перейти к фундаментальным уравнениям, нам следует вспомнить наиболее распространенные математические символы и объяснить их значение.

Язык величин: переменные, функции и поля

Рассмотрим некоторые математические обозначения и символы, используемые учеными. Физические величины принято обозначать буквами (температура T , время t , положение r и т. д.), которые могут принимать разные значения, т. е. означать *переменные величины*. (Иногда пишут просто: *переменные*. — Прим. ред.) Кроме этого в уравнения могут входить некоторые постоянные, часть которых относится к мировым, *универсальным константам* (например, скорость света c и заряд электрона e), а другие являются параметрами систем и имеют конкретные численные значения. Например, в уравнения может входить вязкость η , которая, конечно, зависит от типа рассматриваемой среды (вязкость патоки существенно превышает вязкость



воды). Физики предпочитают вводить в уравнения не конкретные численные значения таких параметров, а лишь их буквенные обозначения. Таким образом, в записанные уравнения входят наборы букв, означающих разные по характеру величины: переменные, мировые константы и параметры системы.

Давайте добавим к этому списку обозначения переменных другого уровня. Переменные могут зависеть друг от друга, и в таких случаях мы можем говорить о *функциях* или *полях*. Например, температура внутри комнаты зависит от точки измерения и времени, и мы можем выразить ее в виде функции $T(\mathbf{r}, t)$, где запись подразумевает зависимость T от положения точки в пространстве и от времени. Такая функция содержит большое количество информации, так как позволяет определить значения температуры для всех точек пространства в любой момент времени t .

Чтобы сделать жизнь еще сложнее, переменные и функции в уравнениях могут иметь дополнительные компоненты. Они являются, скорее, совокупностью переменных. Различные компоненты обычно обозначают индексами (надстрочными или подстрочными), указывающими на какой элемент данной совокупности они ссылаются.

Например, положение \mathbf{r} точки в трехмерном пространстве может быть обозначено тремя величинами $r_1 = x$, $r_2 = y$ и $r_3 = z$. Комбинированное положение \mathbf{r} называется вектором. Общепринято такую переменную или функцию, имеющие компоненты, обозначать полужирным шрифтом. Буква, набранная полужирным шрифтом, сродни фамилии, тогда как компоненты, указанные индексом, подходят на членов семьи, обозначаемых их инициалами.

Инверсия

При определении математических операций стоит особо упомянуть операцию инверсии. Дело в том, что математические преобразования обычно существуют в виде парных комбинаций, при которых второе отменяет результат использования первого. При попытках определения таких обратных операций (называемых также инверсией) в математике было сделано множество интересных открытий.

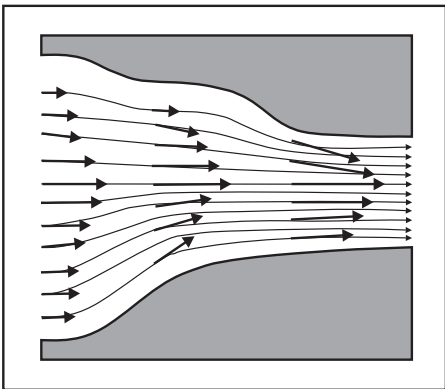
Играя в шарики, мы учимся считать, добавляя положительные целые числа. После проигрыша какого-то числа шариков мы болезненно приходим к понятию о вычитании, и, возможно, открываем исключительно важное число «ноль». Потеряв все шарики, можно перейти к более абстрактному уровню и попытаться вычесть даже большее число, и таким образом можно изобрести отрицательные целые числа.

Аналогично, умножение приводит к делению и, таким образом, открытию рациональных чисел.

Вычисляя квадратный корень из положительных чисел, можно прийти к предположению о непрерывном множестве действительных чисел, тогда как поиски значений квадратного корня от отрицательных величин приводят к введению комплексных чисел. Воистину малые вопросы имеют большие ответы.

Слово «компонент» подразумевает использование некоторой системы отсчета, которая в большинстве случаев является прямоугольной (декартовой) системой координат. Грубо говоря, если мы хотим сказать, что мы находимся, например, в офисе на Манхэттене, мы можем легко описать это место тремя параметрами: первое — это авеню (координата x), второе — такая-то улица¹ (y) и третье — такой-то этаж (z), на котором мы находимся.

Вектор может быть определен в любом измерении, но он всегда имеет длину и направление. Вектор \mathbf{r} можно изобразить, например, стрелкой, направленной от начала координат, т. е. точки с координатами $(0, 0, 0)$ к точке с координатами (x, y, z) , как показано на рисунке на с. 13. Этот ход рассуждений относительно векторов сам подсказывает использование векторов. При вращении вектора изменяется только его направление, а длина остается неизменной. Наборы переменных носят причудливые названия, такие как векторы, тензоры, мультиплеты, спиноры и т. п., которые отражают их поведение при операциях типа вращения. Наконец, существует еще один уровень сложности, связанный со следующей операцией. Рассмотрим, например, функцию или поле с компонентами, напоминающими, «поле скоростей» воды $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ в реке, т. е. поле векторов, описывающих какие компоненты вектора скорости $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ зависят от пространства и времени, т. е. $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i(x, y, z, t)$. И наоборот можно представлять себе такое *векторное поле*, как



¹ В Нью-Йорке принято именовать широкие проспекты как авеню (avenue), а перпендикулярные им более узкие улицы как стрит (street). Таким образом, авеню и стрит образуют прямоугольную сетку на плане города. — *Прим. ред.*

[. . .]

Значения некоторых универсальных постоянных

| | | |
|-----------------------------------|-----------|---|
| Гравитационная постоянная Ньютона | G_N | $6,67 \times 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2$ |
| Константа Больцмана | k | $1,381 \times 10^{-23} \text{ Дж/К}$ |
| Число Авогадро | N | $6,023 \times 10^{23} \text{ 1/моль}$ |
| Скорость света | c | $299\,792\,458 \text{ м/с}$ |
| Постоянная Планка | h | $6,626 \times 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ |
| Заряд электрона | e | $1,602 \times 10^{-19} \text{ Кл}$ |
| Масса электрона | m_e | $9,109 \times 10^{-31} \text{ кг}$ |
| Масса протона | m_p | $1,673 \times 10^{-27} \text{ кг}$ |
| Масса W-частицы | m_W | $1,433 \times 10^{-25} \text{ кг}$ |
| Космологическая постоянная | Λ | $0,7 \times 10^{-26} \text{ кг/м}^3$ |

Вот уже тысячи лет человечество пытается понять природу. Изучая мир на всех уровнях с использованием все более изощренных инструментов, мы сумели разгадать множество великих загадок, которые нас окружают. Собрано огромное количество экспериментальных фактов и открыты фундаментальные законы, которые управляют структурой и развитием физической реальности. Мы знаем, что природа разговаривает с нами на языке математики. Большинство основных понятий физического мира может быть сформулировано на этом языке однозначным и кратким образом. Самый искусственный язык оказался наиболее естественным из всех возможных.

Законам природы соответствуют уравнения. Эти уравнения являются символами познания, которые отмечают критические поворотные моменты нашего понимания мира, в котором мы, оказывается, живем. Они формируют символическое представление большинства наших знаний, и в этом качестве составляют важную и устойчивую часть нашей культуры.

Автор этой книги, **Сандер Бэйс** – ведущий физик-теоретик Университета Амстердама. Его исследования затрагивают вопросы теории элементарных частиц, от квантовой теории поля до теории струн. Однако он с удовольствием совершает вылазки во многие смежные области. Его особый талант заключается в умении сделать физику понятной для широкой аудитории.

Способность С. Бэйса превратить сложное в простое позволяет ему передать важную научную информацию большому числу обычных читателей.

В этой книге он приглашает читателя в путешествие, открывающее красоту и значение семнадцати уравнений, которые составляют основу нашего знания об окружающем мире.