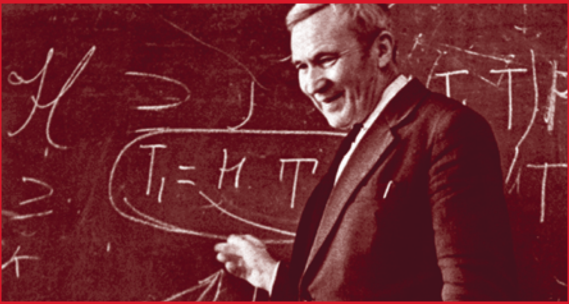
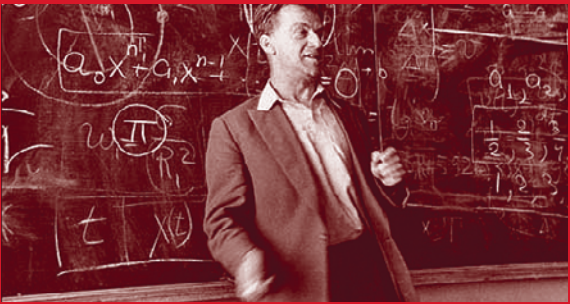
Б.М. ПИСАРЕВСКИЙ
В.Т. ХАРИН

О МАТЕМАТИКЕ, МАТЕМАТИКАХ и не только

Александров П.С.
Арнольд В.И.
Бернштейн С.Н.
Боголюбов Н.Н.
Вавилов Н.И.
Вернадский В.И.
Владимиров В.С.
Галеркин Б.Г.
Жуковский Н.Е.
Зельдович Я.Б.
Капица П.Л.
Келдыш М.В.
Колмогоров А.Н.
Лаврентьев М.А.
Ландау Л.Д.
Лобачевский Н.И.
Лузин Н.Н.
Ляпунов А.А.
Петровский И.Г.
Понтрягин Л.С.
Сахаров А.Д.
Соболев С.Л.
Урысон П.С.
Фихтенгольц Г.М.
Фок В.А.
Харитон Ю.Б.
Чаплыгин С.А.
Чебышёв П.Л.
Черенков П.А.
Шилов Г.Е.





ЛАБОРАТОРИЯ
ПИЛОТ

Б.М. ПИСАРЕВСКИЙ
В.Т. ХАРИН

О МАТЕМАТИКЕ, МАТЕМАТИКАХ и не только

4-е издание

Москва
Лаборатория знаний

УДК 501
ББК 22.1
П34

Писаревский Б. М.

П34 О математике, математиках и не только / Б. М. Писаревский, В. Т. Харин. — 4-е изд. — М. : Лаборатория знаний, 2017. — 301 с. : ил.

ISBN 978-5-00101-034-0

Книга посвящена роли математики в познании человеком окружающего мира. На примере творческих биографий трех выдающихся российских математиков XX века — А. Н. Колмогорова, С. Л. Соболева и А. Н. Тихонова — популярно рассказано о достижениях современной математики.

Книга будет интересна студентам, изучающим курс высшей математики, учителям и преподавателям математики, всем, кто интересуется этой древней наукой.

УДК 501
ББК 22.1

16+

В оформлении обложки использованы фото:
1 и 2 — из открытых источников,
3 — из фотоархива ОИЯИ, автор Туманов Ю. А.

Научно-популярное издание

Писаревский Борис Меерович
Харин Виталий Тимофеевич

О МАТЕМАТИКЕ, МАТЕМАТИКАХ И НЕ ТОЛЬКО

Ведущий редактор *И. А. Маховая*. Редактор *Н. А. Шихова*
Художник *В. Е. Шкерин*. Иллюстрации: *С. В. Белаш*
Технический редактор *Е. В. Денюкова*
Корректор *Е. Н. Клитина*
Оригинал-макет подготовлен *Е. Г. Ивлевой* в пакете LaTeX 2_ε

Подписано в печать 27.09.16. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 19,00. Заказ

Издательство «Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272, e-mail: info@pilotLZ.ru,
http://www.pilotLZ.ru

ISBN 978-5-00101-034-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Первое издание книги было выпущено издательством «Физматлит» в 2004 г. и получило высокую оценку в прессе и у читателей. Во втором издании некоторые фрагменты текста обновлены, добавлен также новый материал.

ДЛЯ КОГО И ДЛЯ ЧЕГО НАПИСАНА ЭТА КНИГА (ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ)

Книга адресована тем, кто не убегал с уроков математики в школе, кто хоть немного знаком с высшей математикой и не возражает против более интимного знакомства.

Это не учебник и не научная монография, но здесь можно встретить обсуждение достаточно глубоких математических вопросов, как самых современных, так и уходящих в глубокую древность.

Авторы старались вести свободную беседу с читателем на темы, для которых в курсах математики обычно не хватает времени. Мы хотели показать, что профессия математика не лишена романтики. Что человеку, большую часть времени погруженному в мир «сухих» формул, нужны и смелость, и фантазия, и чувство прекрасного, не говоря уже о чувстве юмора.

Обсуждается роль математики в жизни людей, ее связь с различными областями знания. Читатель получит представление о том, чем же все-таки занимается математика и почему на этот счет столько разных мнений.

Как исторически сформировались основные понятия и приложения математики? Какие задачи приходится решать математикам в содружестве с физиками, геофизиками, химиками, метеорологами, инженерами, медиками, языковедами? Что нужно, чтобы стать великим математиком, и чем отличаются великие математики от остальных людей? Именно такие общие вопросы рассматривают авторы.

Много внимания уделено личностям трех выдающихся математиков двадцатого века — действительных членов Академии наук СССР А. Н. Колмогорова, С. Л. Соболева, А. Н. Тихонова. Биографии, черты характеров, увлечения, личные впечатления о них коллег, учеников, авторов этой книги. И конечно, знакомство с их творческими достижениями. Читатель увидит, как в жизни представителей сугубо «кабинетной» науки преломилась история страны, великие и трагические моменты в судьбе поколения ровесников двадцатого века.

Авторы считают необходимым отметить глубокое впечатление, которое произвели на них встречи и беседы с С. Л. Соболевым и А. Д. Соболевой, А. Н. Тихоновым и Н. В. Тихоновой, В. А. Ильиным. Без этих встреч книга не была бы написана.

Б. М. Писаревский
В. Т. Харин

Виталий Тимофеевич Харин не увидит этой книги — его не стало летом 2002 г. Это был яркий и разнообразно талантливый человек, ученый, педагог. Его всегда будут помнить друзья, коллеги, ученики.

Б. М. Писаревский

БЕСЕДА ПЕРВАЯ
ЕДИНАЯ СИМФОНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО

ЗЕМЛЯ ИМЕЕТ ФОРМУ ГЕОИДА

Возьмем быка за рога и поставим сразу главный вопрос, который интересует нас в этой беседе: что такое математика?

Мы понимаем, что этот вопрос ставился многократно и что есть масса достойных книг с таким или похожим названием. Но, во-первых, с течением времени даже специалисты несколько видоизменяли свое мнение по поводу ответа на него, во-вторых, это меняющееся мнение излагалось, может быть, недостаточно демократично для того, чтобы его поняли те, кому этого хочется и кто имеет для этого достаточные основания.

Казалось бы, чего проще? Ведь математику учат все школьники и все студенты, даже юристы, религиоведы и художники, судя по нынешним официальным программам соответствующих вузов. Применяют ее все люди без исключения, хотя бы потому, что все считают. Считают яблоки, калории, электроны, количество нераскрытых преступлений, прочность конструкций, рекордные секунды и деньги, деньги, деньги.

И тем не менее, попробуем выяснить, что думают люди на этот счет. Простейший и самый модный способ — произвести «социологический» эксперимент, выйдя на улицу и задавая наш вопрос первым встречным. Дорогой читатель, раз вы взяли в руки книгу с таким названием, вы понимаете, что может получиться из этого эксперимента. Вряд ли стоит публиковать все ответы. И все же мы провели подобный опрос. Лучшим из приличных ответов оказался следующий: «Спросите чтонибудь полегче. Давайте я скажу, что такое физика, химия, экономика, история или другие науки».

Лауреат прав. Это действительно легче. Предмет каждой из упомянутых наук можно охарактеризовать в двух словах, не слишком отклоняясь от истины. Физика — общие свойства материи; химия — состав и превращения веществ на молекулярном уровне; экономика — это, как ни крути, способы разбогатеть, желательно законным путем; история — представление историков о том, как люди жили раньше.

Любая из перечисленных наук смотрит на жизнь природы или человеческого общества со своей, вполне определенной и понятной, точки зрения, собирает и осмысливает факты, пытается выявить закономерности, имеющиеся в ее области, и дает рецепты использования полученных данных в интересах человечества. Во всяком случае, человечеству хочется думать, что это происходит в его интересах, хотя время от времени возникают сомнения.

Какую же область реальности изучает математика? С какой стороны смотрит на мир она?

Произведем второй эксперимент: обратимся к мнению тех, кто пишет на интересующую нас тему. Попробуем полистать книжки в поисках краткого и четкого определения математики. Встретятся, например, такие варианты: «математика — наука о числах и фигурах, т. е. о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира» или «математика — совокупность наук, изучающих количество и порядок». Эти определения, отвечая на один вопрос, ставят кучу новых. В частности, какие именно области знания следует относить к математике? Ведь даже в географии измеряются и сравниваются такие количества, как длины рек, высоты гор, скорости ветров и глубины океанов. А уж о пространственных формах и говорить не приходится. Историки постоянно имеют дело и с количеством, и с упорядоченностью событий во времени и пространстве. Однако никому не приходит в голову относить эти науки к математическим. Можно возразить, что математика имеет дело с количеством и порядком «в чистом виде», а не применительно к чему-либо. А как тогда быть, скажем, с теорией вероятностей, которая использует эти понятия лишь применительно к изучению случайных явлений, но, как известно, представляет собой сугубо математическую науку? Наконец, прежде чем определять математику с помощью понятий «количество» и «порядок», следовало бы выяснить, что это такое.

Встречаются и другие краткие определения математики, имеющие скорее образный, а иногда и шутливый характер, но, тем не менее, вносящие в портрет математики значительно более интересные штрихи, чем определения, приведенные выше. Вот, например: «математика — это язык науки», «математика — это то, что написано в книгах по математике», «математика есть единая симфония бесконечного» (Д. Гильберт), «со времен греков говорить «математика» — значит говорить «доказательство» (Н. Бурбаки).

Мы надеемся, что через несколько страниц читатель сможет по достоинству оценить остроумие двух первых высказываний, разделить с нами восхищение красотой третьего и точностью последнего.

Под впечатлением от этого последнего высказывания, поставим еще один, третий эксперимент. Обратимся к древности, к происхождению самого термина «математика». Если названия других наук, как правило, отражают специфику их предмета («география» означает, в переводе с греческого, «описание Земли», «физика» происходит от слова «природа», «экономика» — это «управление домом, хозяйством»), то «математика» берет начало от греческого *mathema* — познание, наука. Вот так — просто и солидно: познание вообще, наука вообще, без указания объекта изучения. Что же имели в виду древние мудрецы, давшие своей науке столь гордое название? Похоже, они полагали, что ей все равно, что изучать, отводили ей некую универсальную роль в познании различных аспектов реальности. С одной стороны, против такой постановки вопроса трудно возразить по уже упоминавшейся причине — не зря же математику учат все школьники и студенты. Однако хотелось бы понять, в чем именно состоит универсальность математики и действительно ли математика так уж всемогуща, как полагали греки.

Итак, мы убедились, что нелегко найти короткое и понятное определение математики. Тем не менее оно существует. И незачем рыться в книгах, лучше прямо потребовать его у математиков-профессионалов. Чтобы психологически подготовиться к его восприятию, напомним одну поучительную шутливую историю о том, что отвечают географы, когда у них спрашивают, какую форму имеет Земля.

Для античных географов Земля была плоской. Позднее, на основании достижений астрономии и открытий великих авантюристов эпохи Магеллана, географы заключили, что Земля — это шар. С развитием наук они уточняли свое мнение: нет, Земля не шар, это скорее эллипсоид; впрочем, пожалуй, этот эллипсоид несколько сжат в одной половине — нечто вроде груши. В наше время географов уже не устраивают ни шар, ни эллипсоид, ни груша. На основании очень точных измерений они торжественно заявляют: Земля имеет форму геоида. Но что такое геоид? В энциклопедических словарях можно прочитать, что геоид — это тело, имеющее форму Земли!

Конечно, перестав шутить, мы понимаем, что географы — люди серьезные. Просто их объект исследования сложен для краткого объяснения. Поэтому они предпочитают обозначить его кратким термином, глубокий и простой смысл которого они сами прекрасно понимают.

Вот теперь обратитесь к профессионалу-математику, лучше к двум сразу, так будет интереснее, и спросите: «Что изучает математика?». Скорее всего, профессионалы сначала критически вас осмотрят — стоит ли тратить время, затем вдруг начнут спорить между собой. Помимо уже встречавшихся нам фраз о математике, вы услышите массу звучных терминов, таких как «системы структур», «метаматематика», «теоретико-множественный язык», «интуиционизм» и т. д. Через некоторое время математики успокоятся, ибо спорили они для собственного удовольствия. Да, поверьте нам, истинные математики всегда предпочтут беседе о женщинах, и даже об автомобилях, деньгах или садовых участках, лишнюю минуту общения со своей общей любовницей и повелительницей. Если же говорить точно, то математики работают по специальности непрерывно, даже когда окружающие об этом не подозревают. Один наш знакомый, молодой доктор наук, рассказывал: «Сижу я дома на диване, а теща ходит и ворчит, что вот, дескать, зачем женился, — взвалил все на молодую жену, а сам целый день на диване, даже в магазин лень сходить.

Глупая женщина, не видит, что ли, что я работаю?» Но что еще более интересно, математики иногда работают, не подозревая об этом сами. Впрочем, читатель, по-видимому, знаком с этим явлением работы подсознания и даже поправит нас, сказав, что это касается не только математиков, но и всякого, кто постоянно нацелен на решение определенной задачи. Именно напряженная работа подсознания приводит к неожиданным «озарениям».

Так вот, успокоившись, профессионалы дружно сообщат вам: «Математика изучает свойства математических структур или, если вам так больше нравится, математических моделей». Ну вот! Наконец мы получили краткое определение. Но что касается понятности, то единственный выход в этой ситуации — напомнить математикам историю с геоидом. Тогда они вздохнут, посмотрят на часы, попросят сварить кофе и, устроившись поудобнее в креслах, расскажут примерно следующее.

НЕТ НА СВЕТЕ СОВЕРШЕНСТВА

Математика родилась в древней Греции от двух родителей — логики и геометрии. Поэтому ее суть невозможно понять, не разобравшись в природе родителей, что само по себе требует времени и сосредоточенности. Начнем с логики. Ее имя происходит от греческого *logos* — разум, слово. Как сказано в Библии, «В начале было Слово».

Не будем обсуждать сейчас, кто именно — Бог, инопланетяне или Чарлз Дарвин (точнее, открытая им эволюция) — наделили человека сознанием. Мы вернемся к этому вопросу позже. Кстати, может оказаться, что это три псевдонима одного автора. Так или иначе, человек пользуется драгоценным даром для того, чтобы понять мир, в котором он живет. Речь идет о понимании, позволяющем жить в мире и преобразовывать его для своих нужд. Основная схема использования человеком своего разума очень проста, она давно описана философами. Но мы напомним здесь самую суть этой схемы, чтобы отметить печку, от которой будем танцевать дальше.

На основании жизненного опыта индивидуальный разум каждого человека и коллективный разум человечества способны создавать понятия, обобщающие свойства реальных однотипных объектов или явлений, и модели, отражающие связи между понятиями. Простейшие примеры понятий: жизнь, смерть, пища, дом, мать, огонь, земля, Бог; более сложные: причина, правда, связь, число, точка, прямая линия. Мы не исключаем того, что наша оценка относительной сложности этих понятий субъективна. Модели связей: огонь — тепло, враг — смерть, друг — правда, точка лежит на прямой.

Создав модель, человек начинает действовать в соответствии с ней, желая добиться определенного результата.

И регулярно, наряду с успехами, терпит неудачи. Ибо качество моделей всегда несовершенно. Вдруг оказывается, что огонь — это не только тепло, но и ожог, боль; что друг — это не всегда правда, но иногда — предательство, ложь.

Любая подобная неудача — это следствие недостаточного познания мира и, в то же время, импульс, данный природой, чтобы подсказать человеку, как надо уточнить его модель мира. Вся история человечества и вся жизнь каждого человека усеяны такими ошибками, досадными и плодотворными одновременно. Воистину, не имея возможности ошибаться, не научишься.

Можно привести массу примеров на эту тему. Нам хочется рассказать лишь один смешной реальный эпизод.

Маленькая девочка часто с интересом наблюдала, как мама укладывает свои волосы, пользуясь металлическими заколками. Однажды она попросила разрешения участвовать в этом процессе, взяла заколку и с маху всадила ее двумя концами в мамину голову. От боли сначала закричала мама, затем дочка, награжденная парой хороших шлепков. В чем дело? Оказывается, девочка была искренне уверена, что заколки соединяют не волосы с волосами (действительно, это сложно поначалу), а волосы с головой. С этого дня ее модель реального мира улучшилась.

В ходе развития цивилизации, которое, с интересующей нас точки зрения, можно трактовать как непрерывный процесс моделирования и проверки качества моделей на практике, человек создавал и свое понимание того, как функционирует его собственное мышление. Некоторые простые аспекты этого процесса ему удалось свести в модель, называемую ныне *классической* или *формальной логикой*. Она сформировалась в Греции к IV веку до н. э. и впервые изложена Аристотелем в книге «Органон» (орудие — перевод с греческого). Логика стала орудием научного познания.

Одно из основных исходных понятий логики — истинное утверждение или, как говорят сами логики, *высказывание*. Оно возникло как осознание той схемы использования разума, которую мы описали и которую коротко выражают словами «практика — критерий истины». Всякое конкретное высказывание несет в себе некую информацию, т. е. некую основу для деятельности. Если услышавший высказывание человек может совершать на этой основе некоторые действия и всякий раз получать тот результат, который он ожидал в связи с полученной информацией, высказывание следует считать *истинным*. В случае когда информация не оправдывается, надо говорить о *ложном* высказывании. Широко применяемая разведчиками и игроками методика дезинформирования противника (блеф) иллюстрирует именно эту исходную суть понятий истинности и ложности — успех или неудача действий, совершаемых на основе информации.

Параллельно сформировались понятия причины и следствия: про некоторые высказывания A и B можно говорить, что *из* A *следует* B. Это значит, что во всех случаях, когда A истинно, B тоже истинно. Если же A ложно, то об истинности B ничего нельзя сказать. Последняя фраза не менее важна для понимания причинной связи между A и B, чем предыдущая.

Возьмем пример: «Если загробная жизнь не существует (высказывание A), то человеку не придется на том свете отвечать за свои грехи (высказывание B)». Бесспорная истина. Что же практически из нее вытекает для человека? Ровным счетом ничего, поскольку ему ничего не известно об истинности *A*. Хорошо бы проверить эту истинность, в противном случае риск катастрофической ошибки огромен (либо будешь наказан, либо всю жизнь будешь мучиться праведником).

Существенно то, что в рассуждениях об истинности и причинности можно полностью отвлечься от содержательности высказываний, т. е. от того, что именно высказывается. И в этой ситуации, когда важен лишь сам факт истинности или ложности высказывания, можно сформулировать адекватные (соответствующие реальности) модели связей между высказываниями. Например: *всякое высказывание A либо истинно, либо ложно, третьего варианта не существует* (*принцип исключенного третьего — tertium non datur*). Первый вариант означает, что отрицание *A*, т. е. высказывание «*A* ложно», само ложно; второй — что оно истинно. Еще одна моделирующая связь: *если из A следует B и A истинно, то B тоже истинно* (правило *modus ponens*). И еще: *если из A следует B, а из B следует C, то из A следует C*.

Казалось бы, в предыдущем абзаце выписаны тривиальные, само собой разумеющиеся вещи. Однако осознание этих «тривиальностей», их формулировка в общем виде — это начало модели, приближенно описывающей, как человек мыслит, как из истинности некоторых утверждений он делает вывод об истинности других. Важно, что речь идет о «как мыслит», а не «о чем мыслит». Именно поэтому мы говорим о модели процесса мышления, а не о модели каких-либо других проявлений бытия.

Модель мышления, основанная на описанных понятиях истинности и причинности, и называется *классической* или *формальной логикой*. Это великое достижение человеческого разума на пути самопознания играет огромную роль в жизни людей, позволяя добывать новые знания из уже имеющихся чисто умозрительным путем логических рассуждений, не требующих длительного накопления наблюдений или организации дорогостоящих экспериментов.

Конечно, умозрительный, логический процесс познания должен базироваться на уже имеющихся истинах, полученных с помощью наблюдений и экспериментов. Но от этого его значение не уменьшается. Без мыслительной, логической обработки эмпирически накопленного багажа прогресс познания невозможен. Поэтому так благодарно человечество своим великим теоретикам, своим ньютонам и эйнштейнам, максвеллам и лобачевским, колмогоровым и винерам.

Подчеркивая величие логики, надо, с другой стороны, не слишком уж увлекаться комплиментами в ее адрес. Самое время вспомнить беседу Лиса с Маленьким Принцем из знаменитого романа Сент-Экзюпери. Лис очень обрадовался, узнав, что на планете Маленького Принца нет охотников. Но, услышав, что куры там тоже отсутствуют, печально заключил: «Нет на свете совершенства». Да, к сожалению (а может быть, и к счастью, иначе во что бы превратился наш мир?), область применения такой удобной модели, как классическая логика, ограничена. И эта ограниченность заложена в самых ее основах. Далеко не всякое высказывание можно считать истинным или ложным. Например, потому, что оно может вовсе не иметь смысла для того, кто его рассматривает. Так, для нас с вами бессмысленны высказывания «Лошади впадают в Каспийское море», «Волга кушает овес», если нам их сообщат без дополнительной информации (а вдруг это шифровки!). Но главное, истинность многих высказываний сильно зависит от того, кто ее оценивает — продавец или покупатель («это мясо свежее»), муж или жена («очень приятный мужчина»), студент или преподаватель («$\lg(a+b)=\lg a+\lg b$»). Не зря бытуют выражения «женская логика», «классовая логика» и т. д.

Уж так природой создан человек, что в нем противоборствуют два начала: материальное, животное, дьявольское (смотря какой способ выражения мы выбираем — философский, биологический или религиозный) и духовное, человеческое, божественное. Трудно говорить, какое из них хорошее, а какое плохое. Судя по развитию истории до сих пор, оба они необходимы: первое — для того, чтобы человек жил, второе — чтобы он жил человеком. Сторонники духовности, человечности полагают, что за этим началом будущее: сумев побороть трудности материального плана (еда, жилье), человек сумеет реализовать свою божественную сущность равенства и братства. Их противники считают, что все это красиво, но нереально, и делают ставку на биологическую суть человека, понимая равенство лишь как равенство шансов. «Равенство — понятие абиологическое. В природе равенства нет. Равенство придумано человеком, это одно из величайших заблуждений, породивших уйму страданий. Если бы было равенство, не было бы на Земле развития. . . » (В. Д. Дудинцев). Похоже, что пока сторонники второй точки зрения имеют больше аргументов. Однако та часть природы человека, что сосредоточена в мозгах людей типа Кампанеллы, Сен-Симона и Чернышевского, в евангелистской проповеди христианства, не дает человечеству вернуться полностью в лоно биологии.

Похоже, что в двойственности, а точнее противоречивости, природы человеческой отражается общий принцип противоречивости нашего мира: не существует света без тьмы, верха без низа, отрицательных электронов без положительных протонов, богатства без бедности, мира без войны, ума без глупости, здоровья без болезней, мужчин без женщин, продавцов без покупателей, свободы без насилия. Короче, чтобы некая сущность была, требуется бытие противоположной сущности.

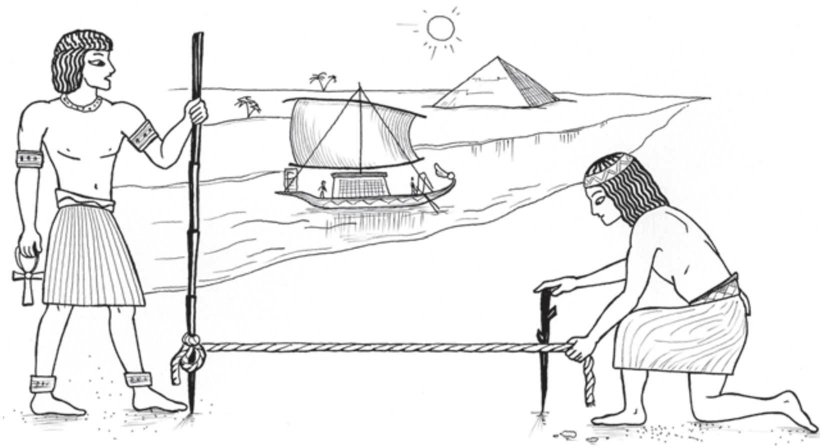
Мы несколько увлеклись. Вернемся к нашим баранам. Применительно к логике можно сказать, что в сложных вопросах социального и психологического порядка формальную логику следует применять крайне осторожно, если она вообще чего-нибудь там стоит. Ибо на оценку истинности высказываний сильно влияют социальные и психологические интересы людей — носителей различных сущностей. И только в тех областях, где истина убедительна для всех, формальная логика оказывается мощным орудием прогресса.

Например, для большого класса явлений естественнонаучного или технологического характера она действительно является очень ценной и плодотворной моделью процесса мышления. Мало кому придет в голову сомневаться в истинности высказываний «Отношение длины окружности к диаметру не зависит от величины диаметра и примерно равно 3,14» или «При вращении замкнутого проводника в магнитном поле в нем возникает электрический ток».

Редким примером проникновения логики в международные отношения является всеобщее осознание следующей истины: ядерная война — смерть человечества, победить в такой войне нельзя. Отсюда логически следует необходимость всепланетного сотрудничества.

РОЖДЕНИЕ БОЖЕСТВА

Обратимся теперь к другому источнику происхождения математики. Геометрия — наука о свойствах пространства, в котором мы живем, в котором существует все, что наверняка существует. В ее основе лежат жизненно важные для существования и производственной деятельности человека понятия, которые формируются на основе ощущений и представлений о «положении», «перемещении», «расстоянии», «направлении», «форме», «размерах» и т. д. На заре развития цивилизации геометрия вовсе не являлась такой стройной и строгой наукой, какой ее знаем мы. Как всякая юная наука, она была в значительной степени экспериментальной — собранием эмпирически найденных приемов для измерения тех или иных величин, связанных с пространственным расположением тел (длин, площадей, углов, объемов и т. д.). Геометрия имела очень предметный характер. Это хорошо видно, если проследить за происхождением геометрических терминов. Переводя их с древних языков, мы получаем такие примеры: геометрия — землемерие, сфера — мяч, центр — заостренная палка, точка — след укола, тычка, конус — сосновая шишка, линия — от слова «лен», ибо изо льна делались нити, куб — игральная кость. Древнеегипетских геометров греки называли «натягивателями веревки». Геродот связывал возникновение



геометрии с необходимостью после каждого разлива Нила справедливо распределять поля между их владельцами.

Накопление эмпирического материала в геометрии и его осмысливание приводили к выделению первичных геометрических понятий, таких как «точка», «линия», «поверхность», «тело», «прямая», «плоскость», «движение», «принадлежность» (например, точка может принадлежать или нет данной прямой, а прямая — данной плоскости) и т. д. Первозданная непосредственность этих понятий привела к некоторым психологическим трудностям при осознании их места в системе геометрической науки. Дело в том, что этим понятиям нельзя дать определения, которые выражали бы их через более простые понятия, так как они сами и есть наиболее простые, происходящие непосредственно из опыта, абстракции. Их можно только пояснить, указав, из каких реальных объектов они произошли в результате обобщения определенных свойств этих объектов. Например, можно сказать, что точка — это возведенная в абсолют совокупность двух противоречивых свойств очень маленьких предметов: занимать ничтожно малое, в пределе нулевое, место в пространстве и, с другой стороны, служить «кирпичиками», из которых складываются все фигуры и тела, все пространство. А если эти понятия нельзя строго определить, то как же можно с ними строго логически оперировать, какие истины можно по их поводу высказать?

Эти сомнения, по-видимому, одолевали самого родоначальника геометрии как теоретической системы — великого Евклида. Вводя, скажем, понятие линии, он говорил, что это длина без ширины и толщины. Как понимать такое утверждение? Если это определение, то оно некорректно, ибо сводит определяемое понятие (линия) к другим, также требующим определения (длина, ширина, толщина). Может быть, это пояснение того типа, о котором только что говорилось, включающее интуицию для лучшего «чувствования» смысла понятия? Но тогда нельзя положить его в основу строгих рассуждений.

Трудности, связанные с невозможностью «строгого» определения первичных геометрических абстракций, были преодолены следующим образом. Надо вернуться к реальным прообразам этих абстракций и посмотреть, как связаны они друг с другом в природе. Из таких наблюдений возникают «очевидные», т. е. понятные, привычные, имеющие место «всегда» связи между соответствующими первичными абстракциями. Например, пусть имеются две различные точки в пространстве, т. е., с интуитивной точки зрения, два «ну очень маленьких, насколько можно себе представить», отдельных участка пространства. Попробуем проводить через обе точки одновременно прямые линии, т. е., опять же с интуитивной точки зрения, «ну очень длинные, очень тонкие туго натянутые нити». Возможно ли это? Житейский опыт отвечает утвердительно. Сколько таких прямых может быть, если точки заданы? Интуиция говорит, что, если прямые и могут отличаться друг от друга, то очень мало и тем меньше, чем «меньше точки» и «тоньше прямые». Когда «точки уменьшаются до предела и прямая утоньшается до предела», тогда, «конечно же», прямая будет единственной. Поскольку в основу наших рассуждений мы хотели положить именно такие предельные конструкции, приходим к выводу: через две различные точки можно провести прямую, причем только одну. Так или примерно так возникли знаменитые аксиомы евклидовой геометрии, т. е. утверждения, связывающие первичные геометрические понятия и считающиеся со времен Евклида бесспорными истинами, уже не подлежащими какому-либо рассудочному обоснованию. С определенным трудом, как мы видели выше, было осознано, что правильно подсмотренные у природы аксиомы и служат строгим определением первичных понятий. Никакого другого определения им не требуется.

Именно на этом этапе и произошло слияние логики и геометрии, которое можно назвать рождением математического метода в науке. Система аксиом геометрии, сформулированная в знаменитых «Началах» Евклида, стала той системой истинных высказываний, исходя из которой стало возможным получать новые истинные высказывания (теоремы), уже чисто логически, без всякой ссылки на опыт и наглядность. Совокупность выведенных из аксиом теорем составила теорию, которая называется евклидовой геометрией и по сей день изучается школьниками всего мира.

Таким образом, евклидова геометрия явилась исторически первым и классическим (т. е. образцовым) примером применения *математического метода познания.* В наше время, говоря «математика», мы должны иметь в виду, прежде всего, эту ее сторону, эту ипостась — ипостась метода. Отталкиваясь от примера евклидовой геометрии, резюмируем сущность метода, в его идеальной форме, так:

1. Строится *математическая модель* того объекта, круга явлений, который интересует исследователя. Это значит, прежде всего, что даются *названия* всем исходным понятиям модели. Это значит, далее, что формулируются некоторые высказывания по поводу связей между исходными понятиями, и эти высказывания объявляются истинными. Они называются *аксиомами* модели.

Для самого метода абсолютно неважно, какой реальный смысл вкладывается в исходные понятия и аксиомы математической модели, хотя это, разумеется, имеет первостепенную важность для исследователя, желающего с помощью модели исследовать свойства чего-то реального.

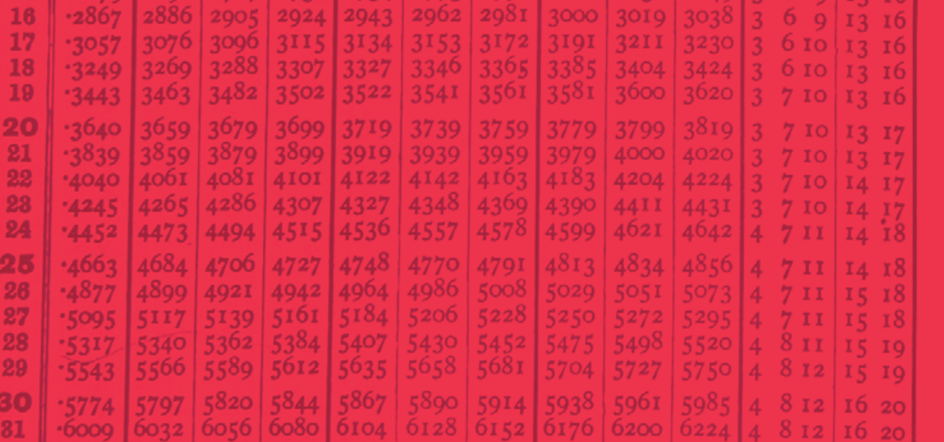
2. На базе системы аксиом строится *теория* модели. Она представляет собой цепь *теорем*, т. е. высказываний, истинность которых выводится (*доказывается*) с помощью правил классической логики из аксиом или из аксиом и ранее доказанных теорем. Отметим здесь же, что некоторые теоремы принято называть *леммами* (если они имеют вспомогательное, техническое значение), *следствиями* (если их вывод из некоторой теоремы очень прост, очевиден). По ходу развития теории встречаются *определения* новых терминов и символов, сокращающих запись рассуждений и результатов.

Конечно, приведенное описание математического метода очень сжато и схематично. Оно требует комментариев, которые мы сейчас и сделаем, в основном на материале той же евклидовой геометрии.

ДОКАЗАТЬ ЭТО НЕЛЬЗЯ, НО Я САМ ВИДЕЛ

Система аксиом евклидовой геометрии содержит в себе всю информацию о евклидовой модели того, что мы называем пространством. Однако эта информация представлена в том виде, в котором она получена на стадии формирования модели, т. е. на стадии наблюдений, экспериментов и их осмысливания. Эта форма информации, вообще-то, не приспособлена и неудобна для применения в практических целях (т. е. для измерения площадей земельных участков, объемов сосудов, строительства зданий, кораблей и т. д.). Даже если выучить наизусть все аксиомы Евклида, это не даст знания формулы объема конуса или выражения длины гипотенузы прямоугольного треугольника через длины его катетов. Хотя справедливость этих теорем уже заключена в аксиомах, как корни, ствол, цветы и плоды дерева — в его семени. Мышление человека, направляемое логическими правилами, — это то питательное начало, которое позволяет аксиоматическому семени истины развернуться в ветвистое и плодоносящее дерево теории.

[. . .]



16	·2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3	6	9	13 16
17	·3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3	6	10	13 16
18	·3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3	6	10	13 16
19	·3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3	7	10	13 16
20	·3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3	7	10	13 17
21	·3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	3	7	10	13 17
22	·4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	3	7	10	14 17
23	·4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	3	7	10	14 17
24	·4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4	7	11	14 18
25	·4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4	7	11	14 18
26	·4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	4	7	11	15 18
27	·5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	4	7	11	15 18
28	·5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	4	8	11	15 19
29	·5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	4	8	12	15 19
30	·5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	4	8	12	16 20
31	·6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	4	8	12	16 20

Борис Меерович Писаревский в 1968 году окончил механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова. Профессор, заместитель заведующего кафедрой высшей математики Российского государственного университета нефти и газа им. И. М. Губкина.

Виталий Тимофеевич Харин (1934 – 2002) в 1957 году окончил механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова. В 1989 – 2002 гг. – профессор, заведующий кафедрой высшей математики Российского государственного университета нефти и газа им. И. М. Губкина.

Дать в настоящее время общее представление о математической науке – значит заняться таким делом, которое, как кажется, с самого начала наталкивается на почти непреодолимые трудности благодаря обширности и разнообразию рассматриваемого материала.

***Н. Бурбаки*.**

Очерки по истории математики. М.: ИЛ, 1963.